# TD1 - Manipulations algébriques 1

O. White

September 10, 2018

1. Manipulations numériques simples. Simplifier au maximum:

(a) $\frac{21}{6}$ (b) $25-(20+7)+1$ (c) $\frac{3\times(15-(27+4))}{9}$
(d) $\sqrt{9}$ (e) $\sqrt{0}$ (f) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
(g) $\sqrt{\sqrt{16}}$ (h) $\sqrt{27}$ (i) $3\sin x+2\cos x+4\sin x$
(j) $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2$ (k) $\sqrt{0.01}$ (l) $\sqrt{2}\times\sqrt{2}$
(m) $\sqrt{2}+\sqrt{2}$ (n) $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ (o) $\sqrt{2^9}$
(p) $(\sqrt{3}-5)^2+\sqrt{3}(9-\sqrt{3})$ (q) $\left(-2^{-6}\times 3^7\right)^5\times\left(\frac{2}{3}\right)^{33}$

2. Manipulations algébriques simples. Condenser au maximum, éventuellement en factorisant:

(a) $a+(b\times c)$ (b) $a-(b-c)$ (c) $(3a-2)(-2a+5)$
(d) $a^5+a^5$ (e) $a^2\times b^3+2a^2$ (f) $1+(1-x)-(1-x)(1+x)$
(g) $(x^2)^3$ (h) $(x-1)(x-2)(x+1)$ (i) $\left(a^3\right)^3-4b-a^9$

3. Factoriser et simplifier au maximum:

(a) $ab-ac+ad$ (b) $ab+b$
(c) $(x-1)(3x+5)+(x-1)(2x+4)$ (d) $9x^2(x+2)-3x(x+2)$
(e) $a^2+9$ (f) $a^2-2$ (g) $81b^4-k^2$
(h) $x-2+x(2-x)$ (i) $(x-6)^2-2(x+1)(6-x)+72-2x^3$

4. Simplifier les fractions et réduire au maximum en évitant les racines carrées au dénominateur:

(a) $\frac{a\times b}{c}$ (b) $\frac{q}{p\times q}$ (c) $\frac{a}{\frac{b}{c}}$
(d) $\frac{a-b}{a+b}$ (e) $\frac{ab+c}{ad+e}$ (f) $\frac{1}{a}-\frac{1-a}{a}$
(g) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ (h) $\frac{a-b}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}$ (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(j) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (k) $-\left(\frac{a^{-3}}{a^{-5}}\right)^2$ (l) $\frac{\left(a^{50}-a^{49}\right)^2}{a^{49}}$
(m) $\frac{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$

1. Correction:

   (a) $\frac{7}{2}$ (b) $-1$ (c) $-\frac{16}{3}$
   (d) $3$ (e) $0$ (f) $\frac{5}{6}$
   (g) $2$ (h) $3\sqrt{3}$ (i) $7\sin x + 2\cos x$
   (j) $2$ (k) $\frac{1}{10}$ (l) $2$
   (m) $2\sqrt{2}$ (n) $5\sqrt{2}$ (o) $16\sqrt{2}$
   (p) $25 - \sqrt{3}$ (q) $-72$

2. Correction:

   (a) $a + bc$ (b) $a - b + c$ (c) $2a^2 - 9$
   (d) $2a^5$ (e) $a^2(b^3 + 2)$ (f) $x^2 - x + 1$
   (g) $x^6$ (h) $(x^2 - 1)(x - 2)$ (i) $-4b$

3. Correction:

   (a) $a(b - c + d)$ (b) $b(a + 1)$ (c) $(x - 1)(5x + 9)$
   (d) $3x(x + 2)(3x - 1)$ (e) Pas factorisable (f) $(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$
   (g) $(9b^2 + k)(9b^2 - k)$ (h) $(x - 2)(1 - x)$ (i) $(x - 6)(3x - 16)$

4. Correction:

   (a) $\frac{ab}{c}$ (b) $\frac{1}{p}$ (c) $\frac{ac}{b}$
   (d) $\frac{a-b}{a+b}$ (e) $\frac{ab+c}{ad+e}$ (f) $1$
   (g) $\frac{a+b}{ab}$ (h) $\frac{ab}{a+b}$ (i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (j) $0$ (k) $-a^4$ (l) $a^{49}(a - 1)^2$
   (m) $\sqrt{ab}$

# TD2 - Manipulations algébriques 2 et équations

O. White

October 2, 2018

1. Résoudre les équations du premier degré suivantes:

   (a) $4x + 2 = 1$
   (b) $3x - 2 = x + 7$
   (c) $7x + 2 = 5x + 1 + 2x + 1$
   (d) $ax + b = 0$
   (e) $3x + 1 = 2x - 1$
   (f) $x^2 + x + 1 = (x + 1)(x - 1)$
   (g) $\pi x - 2x = 5$
   (h) $x\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
   (i) $x\sqrt{7} + 4 = x\sqrt{3 + 4}$
   (j) $5(x + 2) + 2x = 3(x + 5) + 2$
   (k) $x - 1 = \frac{3}{2}$

2. Résoudre les systèmes suivants:

   (a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x - 5y = -21 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} x + 2y = 9 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} 2x - 5y + 8 = 0 \\ x - 7y - 15 = 0 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} 2x - 5y + 8 = 0 \\ x - 7y - 15 = 0 \end{cases}$
   (e) $\begin{cases} (1 + \sqrt{2})x - y = 1 + \sqrt{2} \\ (1 - \sqrt{2})y = \sqrt{2} - 3x \end{cases}$
   (f) $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = -6 \\ 2x + 3y - 4z = -5 \\ -2x + 3y - 4z = 3 \end{cases}$

3. Les polynômes du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ se factorisent en $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $x_1$ et $x_2$ les deux racines (si elles existent dans $\mathbb{R}$). Donner les conditions sur les cas suivants et leurs expressions en fonction de a, b et c :

   (a) Pour qu'il y ait 2 racines
   (b) Pour qu'il y ait 1 racine
   (c) Pour qu'il n'y ait pas de racine
   (d) Quelle interprétation géométrique peut-on attribuer au coefficient $a$?

4. Trouver les racines, s'il y en a:

   (a) $x^2 - 4x + 4 = 0$
   (b) $9x^2 + 12x + 4 = 0$
   (c) $x^2 - 9 = 0$
   (d) $x^2 + 1 = 0$
   (e) $(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 0$
   (f) $(x + 2)^2 + (3x + 3)(x - 1) = 0$
   (g) $9x^2 - 4 = 0$
   (h) $gt^2 + bt + c = 0$
   (i) $x^2 = x$
   (j) $(x + 2)(3 - x) + 2(x - 3)(2x - 5) = 0$

1. Correction:

   (a) $-\frac{1}{4}$ (b) $\frac{9}{2}$ (c) $\mathbb{R}$
   (d) $-\frac{b}{a}$ (e) $-2$ (f) $-2$
   (g) $\frac{5}{\pi-2}$ (h) $2$ (i) $\varnothing$
   (j) $\frac{7}{4}$ (k) $\frac{5}{2}$

2. Correction:

   (a) $(-2,3)$ (b) $(3,3)$ (c) $(-\frac{38}{9},-\frac{131}{9})$
   (d) $(\frac{\sqrt{2}-1}{2},-\frac{2\sqrt{2}-1}{2})$ (e) $(-\frac{25}{17},\frac{32}{17})$ (f) $(-2,5,4)$

3. Discuter en fonction du signe du discriminant:

4. Correction:

   (a) $\frac{ab}{c}$ (b) $\frac{1}{p}$ (c) $\frac{ac}{b}$
   (d) $\frac{a-b}{a+b}$ (e) $\frac{ab+c}{ad+e}$ (f) $1$
   (g) $\frac{a+b}{ab}$ (h) $\frac{ab}{a+b}$ (i) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   (j) $0$ (k) $-a^4$ (l) $a^{49}(a-1)^2$
   (m) $\sqrt{ab}$

5. Correction:

   (a) $2$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) $\pm 3$
   (d) $\varnothing$ (e) $0$ (f) $-\frac{1}{2}$
   (g) $\pm\frac{2}{3}$ (h) $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4gc}}{2g}$ (i) $0,1$
   (j) $3,4$

# TD3 - Sommes et produits

O. White

September 23, 2018

1. Evaluer les expressions suivantes:

   (a) $\sum_{i=1}^{4} i$ (b) $\sum_{i=0}^{4} (1+i)^i$ (c) $\sum_{i=0}^{3} (2i+1)^{-1}$

   (d) $\sum_{i=1}^{7} \mid 4-i \mid$ (e) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} \frac{i}{j}$ (f) $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i}$

   (g) $\sum_{i=0}^{5} (-1)^i (i+1)^3$ (h) $\prod_{i=1}^{6} i^2$ (i) $\prod_{i=1}^{6}\sum_{j=0}^{1} (i+j)$

2. Développer et résoudre:

   (a) $\prod_{i=0}^{1} (x-i) = 0$ (b) $\sum_{i=-2}^{0} (x^{2+i} + 2i) = 0$

3. Lors d'une compétition de ski, Tom réalise 3 descentes en slalom. Les temps mis pour chacune des descentes sont 2 min 45 s, 3 min 1 s et 2 min 41 s. Quel est le temps moyen par descente ?

4. Donner une série statistique:
   (a) de 6 masses dont la moyenne est égale à 65 kg.
   (b) de 6 tailles dont la moyenne vaut 160 cm et dont les valeurs extrêmes sont 140 cm et 185 cm.
   (c) de 6 distances différentes dont la moyenne est égale à 650 km.

5. Compléter chaque série statistique de telle sorte que la moyenne indiquée soit exacte.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Série 1 | 10 | … | 17 | | |
| Série 2 | 13 | … | 2 | 8 | 4 |
| Série 3 | 100 | … | 170 | … | 45 |

| | |
|---|---|
| Moyenne : | 15 |
| Moyenne : | 8 |
| Moyenne : | 75 |

6. Calculer la moyenne pondérée de chacune des séries statistiques suivantes, en arrondissant au dixième si nécessaire.

**a]**

| Valeur | 15 | 35 | 50 | 75 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 3 | 2 | 5 | 2 | 1 |

**b**

| Valeur | 0,3 | 0,8 | 1,5 | 4,4 | 0,1 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 2 | 5 | 9 | 1 | 10 |

7. Cinq personnes réalisent la même épreuve en des temps différents: 10h 12 min 15 s (personne 1), 0,31 jour (personne 2), 11,23 h (personne 3), 33432 s (personne 4), $\frac{1}{730}$ an (personne 5). Quelle est la moyenne des durées (en heures) ?

8. Théorie des 80 km/h. Quel est le temps perdu par un automobiliste hypothétique qui parcourt 50km de nationale avec la nouvelle législation en vigueur ?

9. Réalité des 80 km/h. Pour se rendre à son travail, un employé suit le parcours suivant en voiture. Il quitte le centre ville sur une distance de 2,5 km où sa vitesse moyenne est de 45 km/h. Il arrive ensuite hors agglomération où il parcourt un tronçon routier de 13 km sur nationale dont la vitesse est limitée à 80 km/h. Il emprunte ensuite une portion de voie rapide sur 14 km (limitée à 110 km/h). Pour arriver à destination, il lui reste 800 m à parcourir dans un zoning industriel (40 km/h à cause des ronds-points). Combien de temps a-t-il perdu (choisissez l'unité la plus appropriée) entre l'ancienne et la nouvelle législation ?

1. Correction:

   (a) 10 (b) 76 (c) 176
   (d) 12 (e) $\frac{11}{2}$ (f) $\frac{9}{2}$
   (g) $-27$ (h) 518400 (i) 48

2. Correction:

   (a) $(0, 1)$ (b) $\frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

3. 2 min 29 s

4. NA

5. NA

6. Correction:

   (a) 47.31 (b) 0.87

7. 10.03 h

8. $\frac{5}{72}$ h soit 250 s

9. 65 s soit 5%

# TD4 - Notions trigonométriques et vectorielles élémentaires

O. White

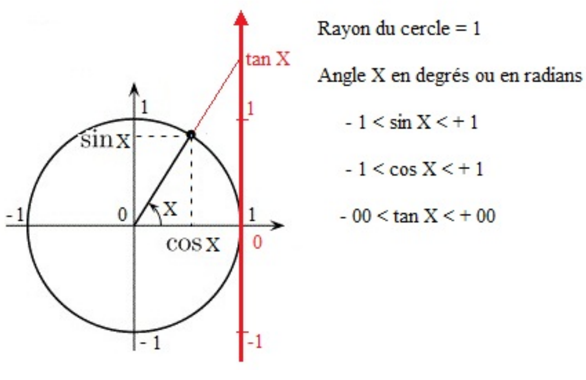
October 2, 2018

1. Remplir le tableau ci-dessous avec les valeurs des fonctions trigonométriques.

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | | | | | | | |
| $\cos x$ | | | | | | | |
| $\tan x$ | | | | | | | |

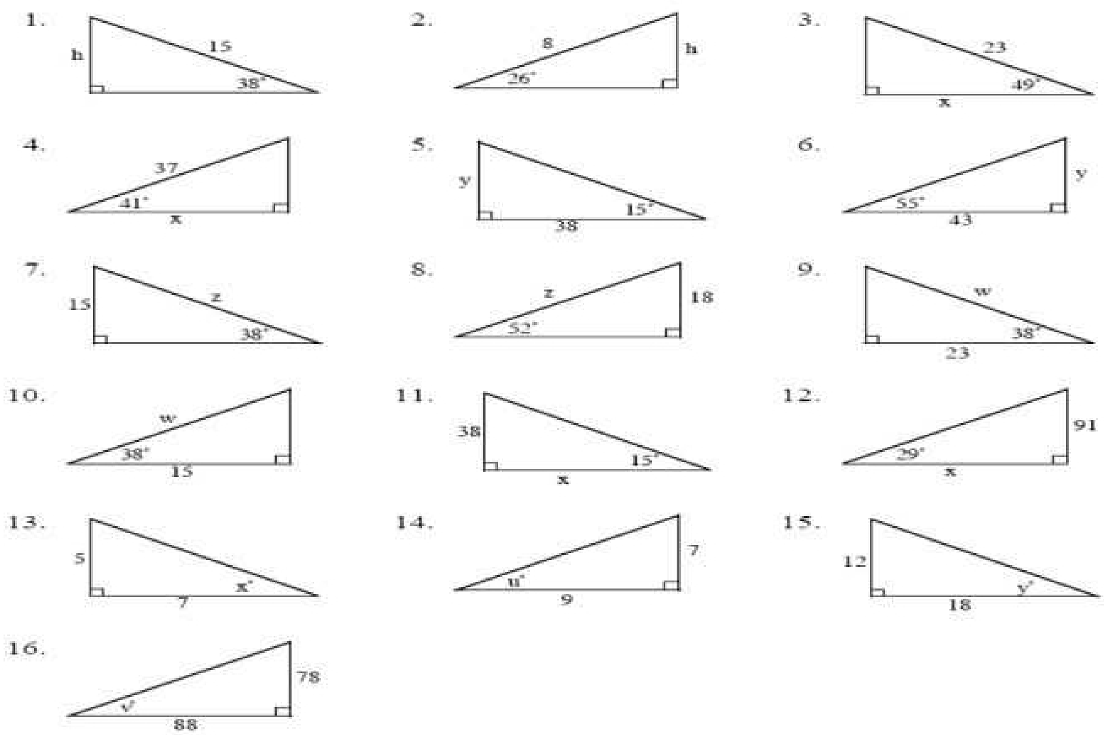
2. Utiliser le cercle trigonométrique rappelé ci-dessous pour réduire les fonctions suivantes avec un argument contenu dans le premier quadrant:

(a) $\sin(-x)$ (b) $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$ (c) $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$
(d) $\cos(-x)$ (e) $\cos(-x-\frac{\pi}{2})$ (f) $\tan(x+\frac{\pi}{2})$
(g) $\cos(\pi-x)$ (h) $\sin(\frac{3\pi}{2}+x)$ (i) $\tan(-\frac{3\pi}{2}-x)$
(j) $\cos(2\pi+x)-\cos(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(\frac{\pi}{2}+x)+\sin(-x)$

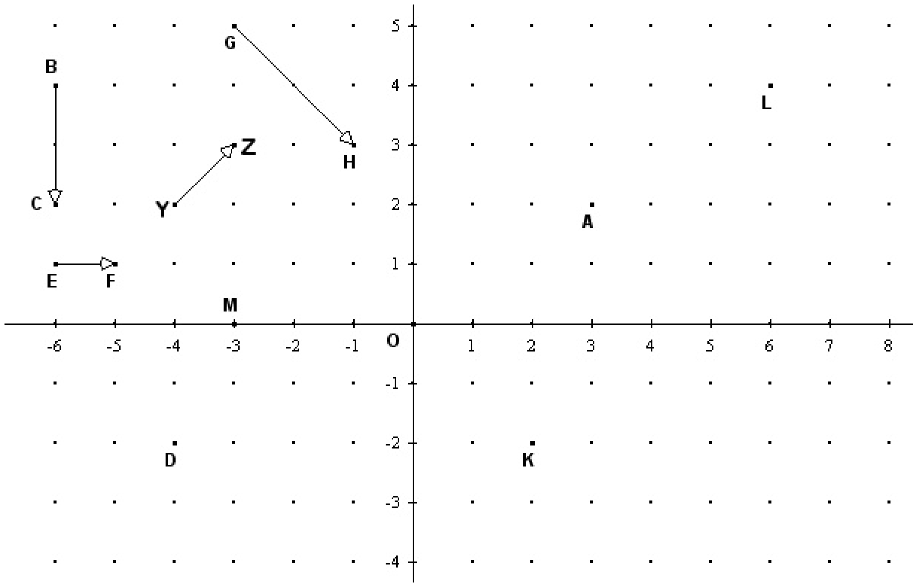


3. Expliquer géométriquement pourquoi $\tan(\frac{\pi}{2}) = +\infty$.

4. Trouver la valeur de la variable indiquée dans chacun de ces triangles rectangles et appliquer le théorème de Pythagore pour vérifier vos résultats.




5. Démontrer la formule fondamentale trigonométrique $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en appliquant le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique.




6. Manipulations géométrique et algébrique de vecteurs:

   (a) Donner les coordonnées des points A, B, M et K
   (b) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{YZ}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{KD}$
   (c) Utiliser deux vecteurs au choix pour créer le vecteur $\overrightarrow{BC}$
   (d) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{YZ}$
   (e) Calculer la distance entre $D$ et $K$ ($\|\overrightarrow{DK}\|$) et entre $A$ et $L$ ($\|\overrightarrow{AL}\|$)
   (f) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{CY}$ et $\overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{MA}$

1. Voir internet ou tables.

2. Correction:

   (a) $-\sin(x)$ (b) $\cos(x)$ (c) $\sin(x)$
   (d) $\cos(x)$ (e) $\sin(x)$ (f) $\cot(x)$
   (g) $-\cos(x)$ (h) $-\cos(x)$ (i) $-\cot(x)$
   (j) $3(\cos(x) - \sin(x))$

3. Axe des tangentes est parallèle à l'axe des sinus.

4. Correction:

   (a) $15 \sin 38$ (b) $8 \sin 26$ (c) $23 \cos 49$
   (d) $37 \cos 41$ (e) $38 \tan 15$ (f) $43 \tan 35$

5. NA

6. Correction:

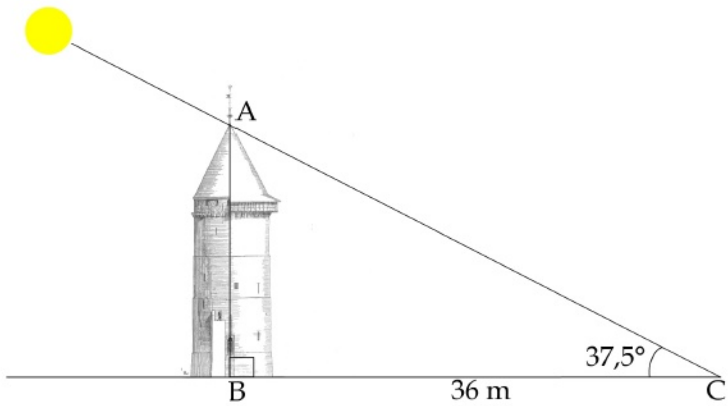
   (a) $(3,2), (-6,4), (-3,0), (2,-2)$
   (b) $(1,0), (1,1), (-6,-2), (6,0), (-6,0)$ (c) ex.: $\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HZ}$
   (d) $(-4,1)$ (e) $\|\overrightarrow{DK}\| = 6, \|\overrightarrow{AL}\| = \sqrt{13}$ (f) $0, 2, 8$

# TD5 - Résolution de problèmes et méthode

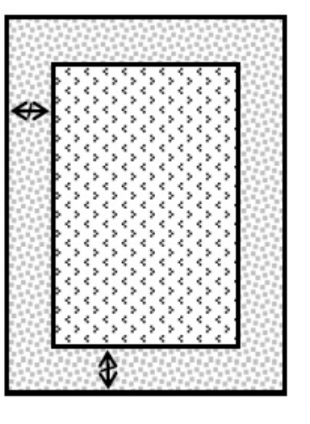
O. White

October 2, 2018

1. Quelle est la hauteur d'une tour qui donne 36 mètres d'ombre lorsque le soleil est élevé de 37,5 deg au-dessus de l'horizon ? On donnera cette hauteur au mètre près.

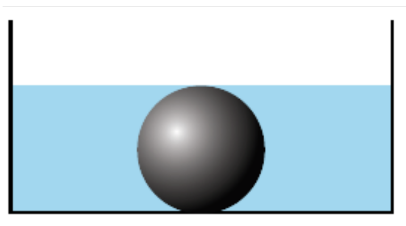


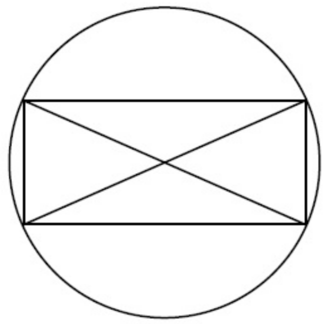

2. Quelle est la largeur de la bande qui permet de partager un champ rectangulaire en deux parties de même aire ? Certains paysans avaient une solution simple, à savoir : "Le quart de la différence entre le raccourci pour traverser le champ et ce qui longe le champ". Commenter cette solution en la comparant à votre réponse.



3. L'atomium est un monument situé en Belgique et érigé lors de l'exposition universelle de 1958. Il représente un cristal de fer aggrandi 165 milliards de fois. Sa structure est cubique (voir figure ci-dessus). A chaque sommet est positionnée une sphère. La neuvième sphère se situe au centre du cube. Si la longueur d'une arête est $c$, quelle est la distance qui sépare la sphère centrale de l'une des sphères extérieures ?

4. On place une bille sphérique de rayon $x$ cm dans un récipient cylindrique de rayon $R_1 = 8$ cm. On souhaite savoir pour quelle(s) valeur(s) du rayon $x$ la bille affleure à la surface de l'eau si on verse le contenu d'un verre d'eau dans le récipient. Le verre d'eau a un rayon $R_2 = 4$ cm et une hauteur $h = \frac{355}{12}$ cm.





5. Quelle est la plus grande aire possible d'un rectangle inscrit dans un cercle de rayons $R$ ?

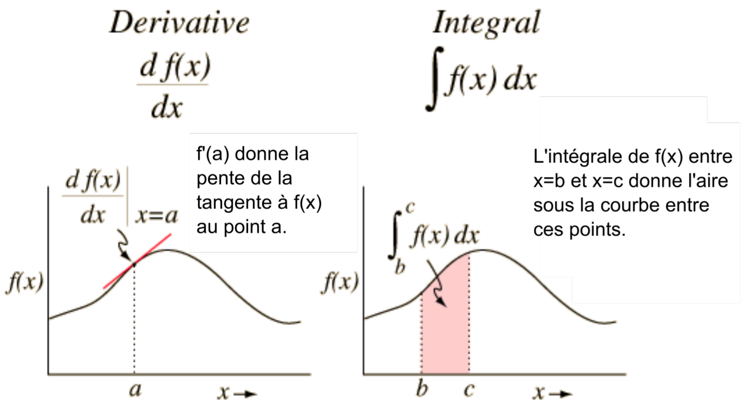
1. 28 m.
2. $x = \frac{L+l\pm\sqrt{L^2+l^2}}{4}$, avec $L =$ longueur et $l =$ largeur.
3. $\frac{c\sqrt{3}}{2}$
4. Résoudre $\frac{4}{3}\pi x^3 - 2\pi R_1^2 x + \pi R_2^2 h$, on trouve 2 solutions dont une est 5 cm.
5. $2R^2$

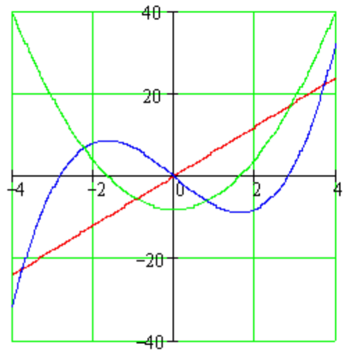
# TD6 - Dérivées et intégrales

O. White

October 2, 2018

1. Rappeler l'intuition des concepts de fonction, dérivée et primitive au moyen de la figure gauche ci-dessous. Illustrer les concepts géométriques sous-jacents de (dé)croissance, extremum, courbure, point d'inflexion. Considérer la fonction $f(x) = x^3 - 4x$ et calculer ses dérivées première et seconde (figure droite).




2. Avec l'aide des formules rappelées ci-dessous ($C \in \mathbb{R}$),

| Règles principales | | |
|---|---|---|
| Fonction | Dérivée | Primitive |
| $a$ | $0$ | $ax + C$ |
| $x$ | $1$ | $\frac{x^2}{2} + C$ |
| $x^n$ | $nx^{n-1}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $e^x + C$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $x \ln x - x + C$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\sin x + C$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $-\sin x + C$ |

dériver analytiquement les fonctions suivantes:

(a) $37$ (b) $\pi - x$ (c) $\pi x + 2$
(d) $3x - 4$ (e) $\frac{4}{x}$ (f) $4x^7 - 2x^4 + 1$
(g) $\frac{3+x}{2-x}$ (h) $5\sqrt{x}$ (i) $\sin x + 3\cos x$
(j) $e^{3x-1}$

3. Calculer les intégrales suivantes:

(a) $\int_0^2 x^2 dx$ (b) $\int_0^5 2x dx$ (c) $\int_0^{2\pi} (\sin x + \cos x) dx$
(d) $\int_{-1}^1 (3x+2) dx$ (e) $\int_a^b (Ax+B) dx$ (f) $\int_0^4 (e^x + \sqrt{x}) dx$

4. Tracer chacune des fonctions suivantes et tracer également les dérivées première et seconde:

(a) $f(x) = x$ (b) $f(x) = \sin x$
(c) $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{si } x \in [-\infty, 2] \\ 8, & \text{si } x \in [2, +\infty] \end{cases}$ (d) $f(x) = 4x^2$

1. NA
2. Correction dérivées:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $0$ | (b) $-1$ | (c) $\pi$ |
| (d) $3$ | (e) $-\frac{4}{x^2}$ | (f) $28x^6 - 8x^3$ |
| (g) $\frac{5}{(2-x)^2}$ | (h) $\frac{5}{2\sqrt{x}}$ | (i) $\cos x - 3\sin x$ |
| (j) $3e^{3x-1}$ | | |

3. Correction intégrales:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $\frac{8}{3}$ | (b) $25$ | (c) $0$ |
| (d) $4$ | (e) $\frac{Ab^2}{2} + Bb - \frac{Aa^2}{2} - aB$ | (f) $e^4 - \frac{13}{3}$ |

4. NA

# C'est quoi, une dérivée ?

Expliquez le à votre petite soeur

C'est quoi une dérivée ?
Eh bien, c'est simple : c'est la limite du taux d'accroissement.

Euh ...
Oui, le nombre dérivé d'une fonction $f$ en un point $a$, c'est $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Enfin du moins quand c'est réel.

Euh ...
Tu comprendras quand tu seras plus grande ...

Mais en vrai, c'et quoi une dérivée ?

## I Qu'est-ce qu'une dérivée ?

### 1) Une pente

Sur les routes, on peut voir parfois : « attention, descente de 10% ». Cela veut dire que, lorsqu'on parcourt une distance de 100 mètres (mesurés sur la carte), on descend de 10 mètres en altitude. La pente de la route est de 10%, c'est-à-dire $\dfrac{10}{100}$, c'est-à-dire $0,1$. En fait, pour distinguer les descentes des montées, on dira qu'en descente la pente est de $-0,1$ et qu'en montée elle est de $0,1$. C'est un des aspects de la notion de dérivée : en gros, la dérivée du profil de la route (les altitudes), c'est la pente.

Mais cette notion ne s'applique que si la pente est constante, c'est-à-dire si le profil est droit (rectiligne) ! Que se passe-t-il si le profil est courbe ? En chaque point de la route, la pente est différente ! Comment calculer la pente en chaque point ?
Eh, bien, on triche un peu. On fait semblant de croire que la route a un profil droit dans une petite portion autour du point. C'est effectivement à peu près le cas si le profil n'est pas trop fortement courbé, et si on se restreint à des points très voisins. On calcule alors la pente comme précédemment, mais sur une toute petite distance. Par exemple sur la route précédente, quand on avance de 10 cm, on descend de 1 cm, quand on avance de 1 cm, on descend de 1 mm.

Mais on ne peut pas mesurer des distances aussi petites avec précision, et sur une route, en plus !
C'est là qu'il faut sortir de la physique pour faire des mathématiques, qui raisonnent sur des objets abstraits, « idéaux », sans se soucier des conditions pratiques de mesure. Pour simplifier, supposons que la route n'a pas de virages. Il faut supposer aussi qu'on connaît exactement le profil de la route, par exemple sous forme de formule. Admettons qu'à partir d'un certain point considéré comme origine (le kilomètre 0) on sache calculer exactement l'altitude de tout point de la route, en repérant chaque point par sa distance (en mètres) au point origine (distance sur la carte, c'est-à-dire en projection dans une vue de dessus comme dans Google Earth ou Geoportail).
Par exemple, supposons que l'altitude soit le millième du carré de la distance (il vaut mieux ne pas aller trop loin sur une route comme ça ...). Quelle serait la pente au point qui se trouve à une distance de 50 mètres de l'origine ?

Déjà l'altitude serait de $\dfrac{50^2}{1000} = 2,5$.
Mais en quelle unité, en mètres carrés ? Ca n'a pas de sens !

Pardon, pour être plus précis j'aurais dû dire : si la distance vaut $x$ mètres, l'altitude vaut $\dfrac{x^2}{1000}$ mètres.
Donc l'altitude est de 2,5 mètres. Avançons maintenant de 10cm. La distance devient $50,1$, l'altitude devient $\dfrac{50,1^2}{1000}$, qui vaut $2,51001$ (valeur exacte). Donc on a monté de $0,01001$ mètre. Donc sur cette petite portion de 10 cm, en admettant que le profil est rectiligne (ce qui est faux), on obtient une pente de $\dfrac{0,01001}{0,1} = 0,1001$ (on calcule le rapport : $\dfrac{\text{variation d'altitude}}{\text{variation de distance}}$).
En langage de code de la route, c'est une pente de 10% (à peu près).

Mais c'est arbitraire d'avoir choisi 10 cm ! Et si j'avais voulu choisir autre chose, 20 cm par exemple, ou 1 cm, on n'aurait pas trouvé la même pente !
Non c'est vrai, pour 20 cm on trouve une pente de $0,1002$ et pour 1 cm on trouve $0,10001$ (et pour 1 m on trouve $0,101$). Il ne s'agit en fait que d'une pente *moyenne*

égal à $\dfrac{d^2}{1000}$ (en litres).
Quel serait le débit au bout d'une minute ?

Le volume serait $\dfrac{60^2}{1000}$, soit $3,6$ litres. Si on laisse couler ensuite pendant une seconde, le volume deviendra $\dfrac{61^2}{1000}$, soit $3,721$. Le débit moyen sera alors $\dfrac{3,721-3,6}{1}$, soit $0,121$ litres par seconde. Si on considère une seconde comme une durée petite, alors cela sera en gros le débit instantané au bout d'une minute
Parfait, mais on sait maintenant qu'avec la notion de dérivée on peut profiter de formules mathématiques toutes faites, démontrées par les mathématiciens. Ici, c'est exactement la même formule que dans l'exemple de la pente de la route, donc c'est la même dérivée : $\dfrac{2d}{1000}=\dfrac{d}{500}$. Ici $d=60$, donc le débit instantané vaut $\dfrac{2\times 60}{1000}=0,12$.
Ta valeur de $0,121$ est finalement une assez bonne approximation.

### 3) Une vitesse

Imaginons une voiture qui roule sur une route droite (c'est-à-dire sans virage). Pour éviter de confondre le problème avec celui de la pente d'une route, supposons aussi que la route est horizontale (mais ça n'intervient pas). Supposons que la voiture part du kilomètre 0 à l'instant 0. Au bout d'un temps $t$, elle a parcouru une distance $d$, et sa vitesse moyenne est $\dfrac{d}{t}$
En gros, la dérivée de la distance parcourue, c'est la vitesse.

Mais cette notion ne s'applique que si la vitesse est constante ! Que se passe-t-il si ce n'est pas le cas ? A chaque instant, la vitesse est différente ! Comment calculer la vitesse à chaque instant ?
C'est toujours la même question, on pourrait aller plus vite ...

Oui, d'accord. Si à l'instant $t$ on est à la distance $d$, on calcule où on sera un petit instant plus tard, par exemple à l'instant $t+h$ avec $h$ petit. Si cette distance est $e$, alors la vitesse moyenne sur la petite durée $h$ sera $\dfrac{e-d}{h}$, et comme $h$ est petit, on peut considérer que c'est quasiment la vitesse instantanée à l'instant $t$
Oui, et comment peut-on faire pour calculer exactement la vitesse instantanée ?

Eh bien il faudrait connaître la formule qui donne la distance en fonction du temps, et appliquer les fameuses formules démontrées par les mathématiciens pour calculer la dérivée.
Parfait

Et à quoi ça sert, tout ça ?

## II A quoi sert une dérivée ?

### 1) Calculer de manière approchée une variation d'une grandeur à partir de sa dérivée en un point

Les exemples précédents montraient comment calculer la pente d'une route à partir de son profil, le débit d'un robinet à partir du volume écoulé, la vitesse d'une voiture à partir de la distance parcourue.
Mais suivant les conditions, certaines grandeurs ne sont pas faciles à mesurer pratiquement (par exemple le profil, le volume). Dans certaines situations, il est plus facile de mesurer directement la grandeur qui correspond à la dérivée. Par exemple, il existe des débitmètres pour mesurer le débit (c'est utile en particulier pour les personnes asthmatiques).
Par exemple, si on apprend que le débit est de $0,1$ litre par seconde à un instant $t$, alors on pourra dire qu'en gros, à partir de cet instant, une seconde plus tard il se sera écoulé 0,1 litre. Il se peut que le débit ne soit pas constant, et alors cela ne sera pas la valeur exacte, mais c'est une approximation raisonnable car une seconde est un petit intervalle pour ce genre de débit.
Plus généralement, connaître la dérivée d'une fonction en un point permet de trouver une approximation de la variation de cette fonction sur un petit intervalle.

### 2) Remplacer localement une courbe par une droite

Etudier une courbe est souvent plus difficile qu'étudier une droite. Pour faciliter l'étude d'une courbe au voisinage d'un point (par exemple une route dont le profil est courbe), on peut remplacer la courbe par la droite qui correspondrait à une route dont le profil serait rectiligne, avec comme pente la pente de la route en ce point (donc la dérivée du profil). On peut montrer que cette droite est celle qui approche le mieux la courbe au voisinage du point. L'avantage est qu'on simplifie, mais l'inconvénient est qu'on n'a plus les valeurs exactes.

### 3) Calculer la formule d'une fonction à partir de celle de sa dérivée

Par exemple, les théorèmes mathématiques permettent de dire que si, à tout instant $t$, la vitesse est égale à $2t$ , alors la distance parcourue est égale à $t^2$.

### 4) Calculer la formule d'une grandeur à partir d'une relation entre cette grandeur et sa dérivée

Certaines lois de la nature s'expriment par des relations entre une grandeur (qu'on peut exprimer comme une fonction du temps) et sa dérivée.

Par exemple, il peut exister une loi qui dit qu'une certaine fonction est égale à la moitié de sa dérivée. Des techniques mathématiques permettent alors de retrouver exactement la formule de cette fonction.
On arrive à trouver une description précise du phénomène à partir de la loi générale qui cause le phénomène.

## III Conclusion

Finalement, peux-tu me dire ce qu'est une dérivée ?
Oui, je crois que j'ai compris : la dérivée d'une fonction $f$ sur un intervalle $I$ est la fonction qui, à tout nombre $a$ de $I$ associe l'unique nombre $m$ (s'il existe) tel que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ 0 < |x-a| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - m \right| < \varepsilon$$

Finalement, c'est assez simple.
Euh ...
Tu comprendras quand tu seras plus grand ...

sur la portion de route considérée.

Mais alors quelle est la VRAIE pente au point considéré ?
On ne va pas l'obtenir directement, mais de plus en plus précisément, en prenant une portion de route de plus en plus petite :

| *portion* | $1$ | $0,1$ | $0,01$ | $0,001$ | $0,0001$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *pente* | $0,101$ | $0,1001$ | $0,10001$ | $0,100001$ | $0,1000001$ |

On peut démontrer plus généralement que, si la portion vaut $10^{-n}$ (ce qui peut être très petit quand $n$ est grand), alors la pente vaut $0,1+\dfrac{10^{-n}}{1000}$. Donc la pente se rapproche d'aussi près qu'on veut de $0,1$ pourvu qu'on choisisse une portion suffisamment petite. On considérera alors cette valeur de 0,1 comme la « vraie » valeur de la pente au point considéré. C'est la valeur *limite* vers laquelle tend la pente moyenne quand on considère des portions de route de plus en plus petites.

Et si on veut calculer la pente en un autre point, par exemple au point qui se trouve à 1 km de l'origine, il faut refaire tous ces calculs ?
Heureusement non, parce que les mathématiciens les ont faits une fois pour toutes et les ont résumés dans des formules (du moins lorsque la formule qui définit le profil de la route n'est pas trop compliquée).

Ici, par exemple, le profil de la route est de la forme $ax^2$, avec $a=\dfrac{1}{1000}$. Un théorème dit alors que la pente correspondant au point $x$ est $2ax$. Vérifions avec l'exemple précédent : $2\times\dfrac{1}{1000}\times 50=\dfrac{100}{1000}=0,1$. C'est bien ça.

Pour 1 km, $x=1000$ mètres, donc la pente est $2\times\dfrac{1}{1000}\times 1000=2$, c'est-à-dire une pente de 200 %. Une telle route ferait un angle de plus de 60 degrés avec l'horizontale, ce n'est pas réaliste.

Finalement, c'est quoi une dérivée ?
Pour être complet, on doit dire « dérivée d'une fonction », et il faudrait définir précisément ce qu'est une fonction. Ici, la fonction c'est le procédé de calcul qui permet de trouver l'altitude en fonction de la distance : si la distance est $x$, l'altitude est $\dfrac{x^2}{1000}$. La dérivée d'une fonction de ce type (altitude calculée en fonction de la distance), c'est une autre fonction qui permet de calculer la pente en tout point. Ici, si la distance est $x$, la pente est $\dfrac{x}{500}$

La pente en tout point ... donc on peut savoir quelles sont les portions de route qui montent et celles qui descendent.
Oui, mais pour que les mots « monter » et « descendre » aient une signification il faut bien préciser le sens de parcours : ici on suppose qu'on part du point zéro et qu'on s'en éloigne. Il suffit alors d'étudier le signe de la dérivée : partout où la dérivée (la pente) est positive, la route monte et partout où la dérivée est négative la route descend.

Et donc on peut savoir où il y a des cols rien qu'en connaissant la dérivée !
Oui, un col se caractérise par le fait qu'on y arrive en montant et qu'on en repart en descendant. Du point de vue de la route, c'est un sommet, un maximum. Cela se produit si la dérivée est positive avant et négative après.

Et quelle est la pente au col ?
Elle est nulle : 0 %. Le col est « horizontal» (mais ce n'est qu'en un point).

## 2) Un débit

Imaginons un robinet qui remplit une baignoire (sans fuites) avec un débit constant. Le débit d'un robinet peut s'exprimer par exemple en litres par seconde. Quand ce débit est constant, l'eau s'écoule régulièrement, et le débit se calcule en divisant le volume d'eau qu'il y a dans la baignoire par le temps qu'il a fallu pour remplir ce volume. Par exemple, s'il faut 20 secondes pour remplir un litre, on a un débit de $0,05$ litre par seconde.
En gros, la dérivée du volume c'est le débit.

Mais cette notion ne s'applique que si le débit est constant, c'est-à-dire si le robinet coule régulièrement ! Que se passe-t-il si ce n'est pas le cas ? A chaque instant, le débit est différent ! Comment calculer le débit à chaque instant ?
Eh, bien, on triche un peu. On fait semblant de croire que le débit est constant pendant une petite durée autour de l'instant considéré. C'est effectivement à peu près le cas si l'écoulement n'est pas trop irrégulier, et si on se restreint à des instants très voisins. On calcule alors le débit comme précédemment, mais pour une toute petite durée. Par exemple pour la baignoire précédente, sur une durée de 0,1 seconde, la quantité d'eau qui s'écoule est de $0,005$ litres, soit 5 millilitres. C'est un débit moyen, mais comme c'est sur une petite période de temps, on peut considérer que c'est à peu près le *débit instantané*.

Mais on ne peut pas mesurer des quantités aussi petites avec précision, et dans une baignoire, en plus !
C'est là qu'il faut sortir de la physique pour faire des mathématiques, qui raisonnent sur des objets abstraits, « idéaux », sans se soucier des conditions pratiques de mesure. Il faut supposer qu'on connaît exactement l'écoulement du robinet, par exemple sous forme de formule. Admettons qu'à partir d'un certain instant considéré comme origine (l'instant 0 : le moment où la baignoire est vide et où on ouvre le robinet) on sache calculer exactement le volume d'eau dans la baignoire à tout instant. Par exemple, supposons que, si on appelle $d$ la durée depuis l'instant 0 (en secondes), le volume soit

# TD7 - Mesures et physique

O. White

October 2, 2018

1. La distance terre/lune est de 384400 km. Combien de temps environ met la lumière pour voyager de la lune vers la surface de la Terre ? Même question mais à partir du soleil, situé lui à 152 millions de km ?

2. Estimer le nombre de personnes que l'on peut placer dans la tribune d'un stade de football, sachant que le terrain mesure 100 m x 75 m.

3. Une manifestation a été mesurée comme faisant 2 km de long. Estimez le nombre de personnes qui y participaient.

4. On exprime la vitesse $v$ et l'accélération $a$ d'un corps par les équation suivantes, où t représente le temps. Spécifier les unités SI des coefficients dans chaque équation:

   (a) $v = Av$ (b) $v = At^3 - Bt$ (c) $a = Av + Bt^2$
   (d) $v = At^2 - Bt + \sqrt{C}$ (e) $a = \frac{Av}{t} - Ba$ (f) $a = Av^2$

5. L'impulsion se définit soit comme une masse multipliée par une variation de vitesse, soit par une force multipliée par un temps. Dans le premier cas, les unités sont $kg \times m \times s^{-1}$ et dans le second $N \times s$. Démontrer que ces unités sont équivalentes.

6. L'expression $v = \sqrt{2ghm}$ nous donne la vitesse d'impact d'une masse $m$ lâchée d'une certaine hauteur $h$ dans le champ gravitationnel de la terre. Est-elle correcte ?

7. Si vous vous souvenez bien de votre cours de seconde, on exprime la force d'interaction gravitationnelle entre deux corps de masses $m_1$ et $m_2$, distants de $d$ par la relation $F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$. Quelles sont les unités SI de la constante de gravitation universelle G ?

8. Réaliser les calculs suivants en convertissant le résultst final dans les unités du SI:

   (a) $\theta_1 = 32°59'59.8''$, $\theta_2 = 42°12'19.7''$, $\theta_2 - \theta_1 =$
   (b) $2,425L + 2,352dm^3 + 3,10 \times 10^3 cm^3 =$
   (c) $1,75m^2 + 12,3cm^2 + 4,1dm^2 =$ (d) $5mmol \times cm^{-3} =$
   (e) $1.75rad + 5° =$

9. Un segment effectue une rotation de $35°$ en $0,2$s. Quelle est la valeur de la vitesse angulaire moyenne en rad/s ?

10. Calculer la masse d'une sphère creuse d'un rayon extérieur $R_1 = 11$ cm et d'un rayon intérieur $R_2 = 6$ cm. La densité du métal est $d = 8,6$.

1. Un peu plus d'une seconde, 8 minutes.

2. Si le terrain mesure 100 m x 75 m, on peut estimer la taille de la tribune à 100 m x 37,5 m par exemple pour que les spectateurs du fond ne soient pas beaucoup plus loin du terrain que ceux de devant. On a donc une surface de 3750 $m^2$ ; à raison de 3 personnes par $m^2$, on obtient environ 10000 places.

3. Une double voie classique fait 6 m (2x3) de large; on a donc une surface de 6 x 2000 = 12 000 $m^2$ occupée par la manifestation. Avec le même ordre de grandeur que précédemment pour la densité (2 à 3 personnes par $m^2$), on trouve environ 30000 personnes.

4. Correction:

   (a) Sans dimension
   (b) $[A] = ms^{-4}$, $[B] = ms^{-2}$
   (c) $[A] = s^{-1}$, $[B] = ms^{-4}$
   (d) $[A] = ms^{-3}$, $[B] = ms^{-2}$, $[C] = m^2s^{-2}$
   (e) A et B sans dimension
   (f) $[A] = m^{-1}$

5. NA

6. Non car les dimensions ne sont pas celles d'une vitess $(ms^{-1}kg^{1/2})$

7. $[G] = m^3s^{-2}kg^{-1}$

8. Correction:

   (a) $9°12'20'' = 9,12deg$
   (b) 7.877 l
   (c) $1,79223m^2$
   (d) $105,27$ deg

9. $3,05$ rad/s.

10. $\frac{4\pi d}{3}(R_1^3 - R_2^3)$

# TD8 - Récapitulatif

O. White

October 1, 2018

Ce TD est laissé ouvert pour aborder toute notion jugée importante et survolée lors des 7 TD précédents.

# Back to the sixties…

# Exercices supplémentaires

## CHAPITRE VIII

# FRACTIONS

*§ 1. PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES.*
*§ 2. FRACTIONS RATIONNELLES.*

## § 1. — PROPRIÉTÉS DES FRACTIONS ALGÉBRIQUES

### 130. Rappel.

1° *Définitions* (revoir 52).

$\frac{a}{b}$ qui représente le quotient des nombres relatifs $a$ et $b$ ($b$ étant non nul) s'appelle fraction algébrique.

$a$ est le numérateur, $b$ le dénominateur, $a$ et $b$ sont les termes de la fraction.

Par définition du quotient (45) :

$$\frac{a}{b} = q \qquad \text{si} \qquad a = bq.$$

2° *Cas particuliers* (revoir 47) :

$$\frac{a}{a} = 1, \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \text{et} \qquad \frac{a}{-1} = -a.$$

3° *Nombres inverses* (48 et 49).

Deux nombres inverses sont des nombres dont le produit égale 1. L'inverse de $a$ est $\frac{1}{a}$ :

$$a \times \frac{1}{a} = 1.$$

Pour diviser par un nombre relatif, il suffit de multiplier par son inverse :

$$\frac{b}{a} = b \times \frac{1}{a}$$

### 131. Propriété fondamentale.

***On ne change pas la valeur d'une fraction algébrique en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre relatif.***

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$



En effet, si

$$\frac{a}{b} = q,$$

nous avons

$$a = bq$$

et (41, 2°)

$$am = bqm = (bm)q,$$

ce qui exprime que $q$ est le nombre qui multiplié par $bm$ donne $am$, c'est-à-dire que $q$ est le quotient de $am$ et de $bm$, d'où :

$$\frac{am}{bm} = q = \frac{a}{b}.$$

Conséquence : La valeur d'une fraction algébrique ne change pas si on change le signe de chacun de ses deux termes; en effet, cela revient à multiplier chaque terme par $-1$.

### 132. Somme algébrique de fractions de même dénominateur.

Nous avons :

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b} = \frac{a + a' + a''}{b}.$$

En effet, on passe du second membre au premier en appliquant la règle de division d'une somme algébrique par un nombre (51).

### 133. Produit de fractions.

Nous avons :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} = \frac{aa'a''}{bb'b''}.$$

En effet, si

$$\frac{a}{b} = q, \qquad \frac{a'}{b'} = q', \qquad \frac{a''}{b''} = q'',$$

nous avons

$$a = bq, \qquad a' = b'q', \qquad a'' = b''q''$$

et (41, 2°)

$$aa'a'' = bqb'q'b''q'' = (bb'b'')\,(qq'q'')$$

ce qui exprime que $qq'q''$ est le nombre qui multiplié par $bb'b''$ donne $aa'a''$, c'est-à-dire que $qq'q''$ est le quotient de $aa'a''$ et de $bb'b''$, d'où :

$$\frac{aa'a''}{bb'b''} = qq'q'' = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''}$$

En particulier :

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$$

c'est-à-dire que $\frac{b}{a}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$.

REMARQUE. — On dit que $\frac{b}{a}$ est la fraction $\frac{a}{b}$ renversée.

**134. Quotient de deux fractions.**

Nous avons :

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} \times \frac{b'}{a'}.$$

En effet pour diviser par la fraction $\frac{a'}{b'}$, il suffit de multiplier par son inverse $\frac{b'}{a'}$.

**135.**

**Propriétés des fractions**

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b} + \frac{a''}{b} = \frac{a - a' + a''}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} = \frac{aa'a''}{bb'b''}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{a'}{b'} = \frac{ab'}{ba'}$$



## § 2. — FRACTIONS RATIONNELLES

**136. Définitions.**

Une *fraction rationnelle* est une fraction dont les deux termes sont des polynômes (entiers) (69).

Exemples :

$$\frac{2x^2 + 4x - 5}{x + 3}, \qquad \frac{a + b}{c - d}.$$

Une fraction ne représente un nombre relatif que si la valeur de son dénominateur est différente de zéro.

Ainsi, la première fraction n'a pas de valeur pour $x = -3$ et la seconde n'a pas de valeur si $c = d$.

***Nous supposerons toujours dans ce chapitre que les valeurs données aux lettres n'annulent pas les dénominateurs.***

**137. Simplification des fractions.**

On simplifie une fraction en divisant ses deux termes par leur p.g.c.d.

*Règle pour simplifier une fraction :*

1° ***On décompose les deux termes en facteurs.***
2° ***On supprime les facteurs communs.***

Exemple 1 :

$$\frac{4ab^2c}{6a^3b^2} = \frac{2c}{3a^2}.$$

Exemple 2 :

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + ab} = \frac{(a + b)^2}{a(a + b)} = \frac{a + b}{a}.$$

**138. Réduction au même dénominateur.**

*Règle pour réduire des fractions au même dénominateur :*

1° ***On décompose les deux termes de chaque fraction et éventuellement on simplifie chaque fraction.***
2° ***On cherche le p.p.c.m. des dénominateurs.***
3° ***On multiplie les deux termes de chaque fraction par le quotient de ce p.p.c.m. et du dénominateur de la fraction considérée.***

Exemple 1 :

$$\frac{4}{ab^2}, \qquad \frac{2a}{b^2c}, \qquad \frac{1}{a^2bc}.$$

P.p.c.m. des dénominateurs :

$$a^2b^2c.$$

$$\frac{4ac}{ab^2ac}, \qquad \frac{2aa^2}{b^2ca^2}, \qquad \frac{1 \cdot b}{a^2bcb}.$$

$$\frac{4ac}{a^2b^2c}, \qquad \frac{2a^3}{a^2b^2c}, \qquad \frac{b}{a^2b^2c}.$$

Exemple 2 :

$$\frac{2}{b-a}, \qquad \frac{a}{a+b}, \qquad \frac{4a}{a^2-b^2}.$$

$$\frac{-2}{a-b}, \qquad \frac{a}{a+b}, \qquad \frac{4a}{(a-b)(a+b)}.$$

P.p.c.m. des dénominateurs :

$$(a-b)(a+b).$$

$$\frac{-2(a+b)}{(a-b)(a+b)}, \qquad \frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}, \qquad \frac{4a}{(a-b)(a+b)}.$$

### 139. Addition et soustraction des fractions.

*Règle pour calculer une somme algébrique de fractions* (132) :

1° ***On réduit les fractions au même dénominateur.***
2° ***On conserve le dénominateur commun obtenu.***
3° ***On fait la somme algébrique des numérateurs obtenus.***
4° ***On simplifie la fraction obtenue.***

Exemple 1 :

$$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4} = \frac{2(a+b)-(a-b)}{4} = \frac{2a+2b-a+b}{4} = \frac{a+3b}{4}.$$

Exemple 2 :

$$\frac{4}{ab^2} - \frac{2a}{b^2c} + \frac{1}{a^2bc} = \frac{4ac-2a^3+b}{a^2b^2c}.$$

Exemple 3 :

$$\frac{2}{b-a} - \frac{a}{a+b} + \frac{4a}{a^2-b^2} = \frac{-2}{a-b} - \frac{a}{a+b} + \frac{4a}{(a-b)(a+b)}.$$

$$= \frac{-2(a+b)-a(a-b)+4a}{(a-b)(a+b)} = \frac{-2a-2b-a^2+ab+4a}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{2a-2b-a^2+ab}{(a-b)(a+b)} = \frac{2(a-b)-a(a-b)}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{(a-b)(2-a)}{(a-b)(a+b)} = \frac{2-a}{a+b}.$$



### 140. Multiplication des fractions.

*Règle pour calculer un produit de fractions* (133) :

1° ***On multiplie les numérateurs.***
2° ***On multiplie les dénominateurs.***
3° ***On simplifie la fraction obtenue.***

Exemple :

$$\frac{a-2b}{x} \cdot \frac{x^2}{a^2-4b^2} = \frac{(a-2b)x}{x(a^2-4b^2)}$$

$$= \frac{(a-2b)x}{(a-2b)(a+2b)} = \frac{x}{a+2b}.$$

### 141. Division des fractions.

*Règle pour calculer le quotient de deux fractions* (134) :

***On multiplie la première fraction par la seconde renversée.***

Exemple :

$$\frac{a+b}{4b} : \frac{a^2-b^2}{2a} = \frac{(a+b)2a}{4b(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{(a+b)a}{2b(a-b)(a+b)} = \frac{a}{2b(a-b)} = \frac{a}{2ab-2b^2}.$$

### 142. Remarque.

Une expression fractionnaire peut se mettre sous forme de fraction.

Exemple :

$$x + \frac{1}{x} - \frac{x^2}{x+1} = \frac{x^2(x+1)+(x+1)-x^3}{x(x+1)}$$

$$= \frac{x^3+x^2+x+1-x^3}{x(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x^2+x}.$$

**143.**

### Fractions rationnelles

1. Simplification :
   décomposer chaque terme en facteurs;
   supprimer les facteurs communs.
2. Addition et soustraction :
   réduire les fractions au même dénominateur (le p.p.c.m. des dénominateurs);
   conserver le dénominateur commun obtenu;
   additionner ou soustraire les numérateurs obtenus.
3. Multiplication :
   multiplier les numérateurs;
   multiplier les dénominateurs.
4. Division :
   multiplier la première fraction par la seconde renversée.

Toujours simplifier les fractions données, avant toute autre opération.
Toujours simplifier le résultat obtenu.

***Erreurs classiques :***

1° $\dfrac{a+b}{a}$ devient $\dfrac{\cancel{a}+b}{\cancel{a}}$ !

2° $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{a}{b}$ devient $\dfrac{1+a}{a^2+b}$

$\dfrac{a-b}{b-a} = -1$.

une qté à diviser par son opposé $= -1$

$\dfrac{0}{a} = 0$ $\quad \dfrac{a}{0}$ = impossible.

$\dfrac{0}{0}$ = indéterminé, de les ub.



## APPLICATIONS SUR LE CHAPITRE VIII

### Fractions rationnelles

### Simplification

**230.** Simplifier :

1) $\dfrac{5a^3b^3}{15a^5b^2}$ 2) $\dfrac{9a^2b^3}{a^3b^2}$ 3) $\dfrac{a^2b}{a^3b}$ 4) $\dfrac{-15a^3x^2y}{25a^3y^2}$ 5) $\dfrac{7a^2b^4}{-14ab}$ 6) $\dfrac{-16a^4b^2c^3}{-4a^3bc^2}$.

**231.** Simplifier :

1) $\dfrac{3(a+b)}{5(a+b)}$ 2) $\dfrac{5a-5b}{3a-3b}$ 3) $\dfrac{7a+7b}{3a+3b}$ 4) $\dfrac{5a^2+5ab}{2a+2b}$ 5) $\dfrac{4x^2-xy}{12xy-3y^2}$ 6) $\dfrac{2a-2b}{3b-3a}$

7) $\dfrac{ac-bc}{ad-bd}$ 8) $\dfrac{7x-7y}{7}$ 9) $\dfrac{ax+bx}{2xy}$ 10) $\dfrac{ac-bc}{a^2-ab}$ 11) $\dfrac{-3}{9-6a}$ 12) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

13) $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$ 14) $\dfrac{a-b}{b-a}$ 15) $\dfrac{a+b}{-a-b}$ 16) $\dfrac{b-a}{a^2-b^2}$ 17) $\dfrac{a^2-b^2}{(b-a)^2}$ 18) $\dfrac{(a-b)^2}{b^2-a^2}$.

**232.** Simplifier :

1) $\dfrac{3a^2b-3ab^2}{a^2b-a^3}$ 2) $\dfrac{3a^2-3b^2}{5b+5a}$ 3) $\dfrac{x^2-y^2}{xy-x^2}$ 4) $\dfrac{16-a^2}{a+4}$ 5) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$ 6) $\dfrac{(ax+b)^2}{a^3x^2-ab^2}$ 7) $\dfrac{x^2-9y^2}{x^2+6xy+9y^2}$

8) $\dfrac{2x^2-18}{4x^2+24x+36}$ 9) $\dfrac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a^2-b^2}$ 10) $\dfrac{a^2+4-4a}{4-a^2}$ 11) $\dfrac{5x^3-5a^3}{10a^2-10x^2}$ 12) $\dfrac{a^3-b^3}{3a-3b}$ 13) $\dfrac{a^3-1}{1-a^2}$ 14) $\dfrac{a^4-1}{1+a}$

15) $\dfrac{a^4 - 8a}{a^2 + 2a + 4}$

16) $\dfrac{6a^4 - 6b^4}{3a^2 + 3b^2}$

17) $\dfrac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{1 + 2a + a^2}$

18) $\dfrac{2a^2b - 8ab}{2a^3 + 32a - 16a^2}$

19) $\dfrac{a^{2x} - b^{2x}}{a^x + b^x}$

20) $\dfrac{1 - a^{2x}}{1 - a^{3x}}$.

**233.** Simplifier :

1) $\dfrac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 6}$

2) $\dfrac{(x + a)^2 - (x - b)^2}{a^2 + b^2 + 2ab}$

3) $\dfrac{a^2 - c^2 + b^2 + 2ab}{b^2 - a^2 - 2bc + c^2}$

4) $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 2 - x}{x^2 + 3x + 2}$

5) $\dfrac{x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^4 - 4}$

6) $\dfrac{(a + b)^2 - ab}{a^3b - b^4}$

7) $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2}{ax + by + bx + ay}$

8) $\dfrac{2a^2 + a - 6}{4x + 2ax + 3a + 6}$

9) $\dfrac{(a + b)^2 + 2 + 3(a + b)}{a^2 - 4 + 2ab + b^2}$

10) $\dfrac{a^2 - b^2 + bc + ac}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}$

11) $\dfrac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^3 + x^2 + 3x + 3}$

12) $\dfrac{a^4x - b^4x}{2a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 2b^3}$

13) $\dfrac{2x^3 - 6x^2 + 8}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

14) $\dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x}{x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x}$.

## Addition et soustraction

**234.** Effectuer :

1) $\dfrac{5a}{3} + a$

2) $\dfrac{3x}{2} + \dfrac{5x}{4}$

3) $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{5x}{2} + x$

4) $\dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{x + 3}{5}$

5) $\dfrac{a - b}{5} - \dfrac{a - b}{10}$

6) $\dfrac{1}{5} + a - 2$

7) $\dfrac{a}{3} - \dfrac{a - 2}{5}$

8) $\dfrac{x - a}{2} + \dfrac{2a - 3}{5}$

9) $\dfrac{3a - 2b}{3} - \dfrac{5a + 2b}{5}$

10) $\dfrac{a - 4}{3} - a + \dfrac{a}{6}$

11) $\dfrac{2x - 4}{2} - \dfrac{4x - 5}{3} + \dfrac{x - 3}{6}$

12) $\dfrac{5x}{7} - \dfrac{4x + 2}{14} - \dfrac{3 + 2x}{4}$.



**235.** Effectuer :

1) $\dfrac{a + b}{a} + \dfrac{a + b}{2a}$

2) $\dfrac{x + y}{x} - \dfrac{x + y}{y}$

3) $\dfrac{a - b}{a} - \dfrac{b - a}{b}$

4) $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}$

5) $\dfrac{x - 2}{x} - 1$

6) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{a^2}{b^2}$

7) $\dfrac{x + y}{y} - 2$

8) $\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{x + 2}$

9) $\dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{3}{x + 3}$

10) $\dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

11) $a - \dfrac{1 + ab}{b}$

12) $\dfrac{x + 2}{x + 3} - \dfrac{x + 1}{x}$

13) $\dfrac{x - 2}{x - 4} - \dfrac{x - 3}{x - 5}$

14) $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab}$.

**236.** Effectuer :

1) $\dfrac{a}{a + b} + \dfrac{b}{a - b}$

2) $\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}$

3) $\dfrac{3}{x - 3} - \dfrac{6}{3 - x}$

4) $\dfrac{a^2}{a - b} + \dfrac{b^2}{b - a}$

5) $\dfrac{a}{a - b} - \dfrac{ab}{a^2 - b^2}$

6) $\dfrac{x - 1}{x + 2} - \dfrac{x^2 + 8}{x^2 - 4}$

7) $\dfrac{4x}{2x + 1} + \dfrac{12x^2 + 1}{1 - 4x^2}$

8) $\dfrac{1}{x^2 - y^2} - \dfrac{1}{x^2 + xy}$

9) $\dfrac{4}{1 - a^2} + \dfrac{2}{a - 1}$

10) $\dfrac{a}{a^3 - b^3} - \dfrac{1}{a^2 - b^2}$

11) $\dfrac{2}{a^2 - 1} - \dfrac{1}{1 - a} + \dfrac{1}{a + 1}$

12) $\dfrac{2b}{a - 2b} + \dfrac{a}{2b + a} - \dfrac{4ab}{a^2 - 4b^2}$

13) $\dfrac{a - b}{ab} + \dfrac{b - c}{bc} + \dfrac{c - a}{ca}$

14) $\dfrac{1}{(x - 1)^2} - \dfrac{4}{(x^2 - 1)^2} + \dfrac{1}{(x + 1)^2}$

15) $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} - \dfrac{a}{a - b} + \dfrac{b}{a + b}$

16) $\dfrac{a}{a + 3b} + \dfrac{3b}{a - 3b} + \dfrac{6ab}{a^2 - 9b^2}$

17) $\dfrac{1}{a^2 - b^2} + \dfrac{1}{a^2 + ab} - \dfrac{1}{2a^2 - 2ab}$

18) $\dfrac{a}{a^2 + ab + b^2} + \dfrac{1}{a - b} + \dfrac{3a^2}{a^3 - b^3}$

19) $\dfrac{a}{a + b} + \dfrac{a}{a - b} + \dfrac{2ab}{b^2 - a^2}$

20) $\dfrac{1}{4a - 4} + \dfrac{1}{4a + 4} + \dfrac{a}{2a^2 + 2} + \dfrac{a}{a^4 - 1}$.

**237.** Effectuer :

1) $\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{3}{x^2+x-2}+\dfrac{1}{x^2-4}$

2) $\dfrac{3}{x^2-x-2}+\dfrac{4x}{x^2-2x-3}+\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

3) $\dfrac{x-2}{x^2-4x+4}+\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{10}{2x^2-3x-2}$

4) $\dfrac{2x-1}{x^2-x-2}-\dfrac{2x+1}{x^2+x-6}+\dfrac{2x+4}{x^2-4x+4}$.

## Multiplication

**238.** Effectuer :

1) $\dfrac{5a}{2}\times\dfrac{4}{15a}$

2) $\dfrac{-2a}{3bc}\times\dfrac{5bc^2}{4a^3}$

3) $\dfrac{-3a^2b}{2c}\times\dfrac{bc^2}{a^3}\times a$

4) $\dfrac{12a^3b^2c}{5x^2yz}\times\dfrac{-x^3y}{3a^3bc^2}$

5) $\dfrac{-2a^2}{5b}\times\dfrac{3a^2b}{2c^2}\times\dfrac{-15bc}{a^3}$

6) $\dfrac{-5a^2bc}{-7xy^2}\times\dfrac{14x^2y}{-15a^3}\times(-3)$

7) $\left(-\dfrac{3a^2}{5b}\right)\times\dfrac{15a}{x}\times\dfrac{x^2}{27a^3}$

8) $\dfrac{a^{2x}}{b^y}\cdot\dfrac{b^3}{a^{x-1}}\cdot\dfrac{b^{y-1}}{a^x}$.

**239.** Effectuer :

1) $\dfrac{a^2-b^2}{a}\times\dfrac{a^2}{a+b}$

2) $\dfrac{a-b}{x}\times\dfrac{3x^2}{2a-2b}$

3) $\dfrac{a+2}{b-4}\times\dfrac{b^2-4b}{4-a^2}$

4) $\dfrac{a^{2n}-1}{x^2}\times\dfrac{x^2}{a^n+1}$

5) $\dfrac{a^2-4a+4}{a+3}\times\dfrac{a+3}{a^2-4}$

6) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+2ab+b^2}\times\dfrac{-a-b}{a^2+ab+b^2}$

7) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{1-x^2}\times\dfrac{x-1}{x^2+1+2x}$

8) $\dfrac{a^{2x}-b^{2y}}{c^n-d^n}\times\dfrac{c^{2n}-d^{2n}}{a^x+b^y}$

9) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{b-a}\times\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}\times\dfrac{a^2+b^2-2ab}{a^3+b^3}$

10) $\dfrac{x^2-x}{x^2+4x+4}\times\dfrac{x^2+3x+2}{2-x}\times\dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

11) $\dfrac{2x^2-3-5x}{x^2}\times\dfrac{3-x}{4x^2+4x+1}\times\dfrac{-x}{x^2-6x+9}$

12) $\dfrac{3a-5b}{7c^2}\times\dfrac{42ac-42bc}{3ax-5bx+3ay-5by}\times(x+y)$.



**240.** Effectuer :

1) $\left(\dfrac{3a^2}{2}\right)^2$

2) $\left(\dfrac{a^n}{b^n}\right)^3$

3) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$

4) $\left(x-\dfrac{y}{x}\right)^2$

5) $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^3$

6) $\left(-\dfrac{4a^2b}{3x^2}\right)^3$

7) $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\cdot\dfrac{2}{a^2}$

8) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2$

9) $\left(x^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^2$

10) $\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{3}\right)^3$

11) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

12) $\left(\dfrac{x}{y}+1\right)\left(1-\dfrac{x}{y}\right)$

13) $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1\right)$

14) $\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)^2$

15) $\left(\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}\right)^2$.

**241.** Effectuer :

1) $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\dfrac{x^2y^2}{x^2-y^2}$

2) $\left(\dfrac{b}{a}-1\right)\dfrac{a^2b}{a-b}$

3) $\left(a-\dfrac{a-2}{3}\right)\dfrac{6}{a^2-1}$

4) $\left(\dfrac{2}{a}-\dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{2}{a-2}+1\right)$

5) $\left(1-\dfrac{1+x}{1-x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

6) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}\right)\dfrac{a^2-b^2}{2b}$

7) $\left(1+x-\dfrac{1}{1-x}\right)\dfrac{1-x^2}{x^2+x}$

8) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-\dfrac{1}{x}\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)$

9) $\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4}{x^2}\right)\left(\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x+2}\right)$

10) $\left(\dfrac{x}{y}-1\right)\left(\dfrac{x}{y}+1\right)\left(1-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$

11) $\left(\dfrac{a+2}{a-2}-\dfrac{a-2}{a+2}\right)\left(1-\dfrac{4+a^2}{4a}\right)$

12) $\left(\dfrac{2}{3x}-x+\dfrac{x}{3}\right)\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}\right)$

13) $\left(1+\dfrac{a}{1-a}\right)\left(1-\dfrac{a}{1+a}\right)\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

14) $\left(\dfrac{1}{x^2-x-6}+\dfrac{1}{x^2-6x+9}\right)\left(1-\dfrac{5}{2x-1}\right)(x+2)$.

## Division

**242.** Effectuer :

1) $\dfrac{5a^3b^2}{3c^5}:\dfrac{15ab^3}{c^2}$

2) $\dfrac{-2a^2x}{5b^3y}:\dfrac{-4x^2}{ay^3}$

3) $\dfrac{1}{a^2}:\dfrac{1}{a}$

4) $\dfrac{-2a^2b}{c}:abc$

5) $\dfrac{a^x}{b^y}:\dfrac{a^{x-2}}{b^{y-1}}$

6) $a^{2x}:\dfrac{a^x}{b^y}$.

**243.** Effectuer :

1) $(a^2 - b^2) : \dfrac{a-b}{a+b}$

2) $\dfrac{2a-2}{a-3} : \dfrac{a-1}{a^2-9}$

3) $\dfrac{a^2-b^2}{ab} : \dfrac{a+b}{2a}$

4) $\dfrac{a^3-b^3}{a+b} : (a^2+ab+b^2)$

5) $\dfrac{x^2-4}{x+3} : \dfrac{x-2}{x^2-9}$

6) $\dfrac{2a^2-ab}{x+y} : \dfrac{a}{x^2-y^2}$

7) $\dfrac{x^2-2xy}{x^2+y^2} : \dfrac{x^2-3xy+2y^2}{x^4-y^4}$

8) $\dfrac{a^2-b^2-4b-4}{b^2-a^2+4a-4} : \dfrac{a+b+2}{a+b-2}$.

**244.** Effectuer :

1) $1 : \left(\dfrac{a-b}{a+b} - 1\right)$

2) $\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}\right) : \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

3) $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{xy}\right) : (x^3 - y^3)$

4) $\left[\dfrac{x^2}{4} + y(x+4y)\right] : \dfrac{ax+2ay-x-2y}{a^2-1}$

5) $\left(\dfrac{1}{3x-1} - \dfrac{1}{x+5}\right) : \dfrac{x^2-9}{3x^2+8x-3}$.

## Exercices récapitulatifs sur les fractions

**245.** Transformer en fractions les expressions suivantes :

1) $1 + \dfrac{1}{x}$

2) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$

3) $\dfrac{2}{a} + \dfrac{a}{2}$

4) $a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$

5) $2a - \dfrac{4a-3}{5}$

6) $a + \dfrac{b^2}{a+b} - b$

7) $\dfrac{x^2-x+1}{x-1} - x$

8) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

9) $1 - x + x^2 - \dfrac{x^3}{x+1}$.

**246.** Effectuer :

1) $\dfrac{3}{1+a} - \left(\dfrac{2}{1-a} + \dfrac{5a}{a^2-1}\right)$

2) $\dfrac{3-2x}{2x+3} - \dfrac{2x+3}{3-2x} + \dfrac{36}{4x^2-9}$

3) $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)\dfrac{xy}{x-y}$

4) $\left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3}\right)\left(x - 5 + \dfrac{6}{x}\right)$

5) $\left(\dfrac{a^2}{2} + \dfrac{b^2}{2} + ab\right) : \left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$



6) $\left(a + 2 - \dfrac{x^2-1}{a}\right) : \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{a+1-x}\right)$

7) $\left(\dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{x-1} + x\right) + \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

8) $\left[\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{ab}\right)\left(a + b + 1\right)\right] : (a^2 + 2ab - 1 + b^2)$

9) $\left(\dfrac{1}{x+2} + 1\right) \times \dfrac{x^2+4+4x}{9-x^2} \times \dfrac{x^2+9-6x}{x^2-2+x} \times (x-1)$

10) $\left[\left(x^2 - 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - 1\right)^2\right] - x^2 - 1$.

**247.** Effectuer :

1) $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{ab} - 2}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}}$

2) $\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{1}{y^2}} - \left(y \times \dfrac{1}{x}\right)^2$

3) $\dfrac{a^4-b^4}{-3b} \times \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$

4) $\dfrac{1}{1 + \dfrac{3}{a}} + \dfrac{1}{\dfrac{a}{3} - 1} - \dfrac{2}{\dfrac{a}{3} - \dfrac{3}{a}}$

5) $\dfrac{\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a-b}}{\dfrac{1}{a-b} + \dfrac{1}{a+b}} + \dfrac{\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{b}}$

6) $\dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$

7) $\left[x - \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\right] \times \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$

8) $\dfrac{1 - \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y^2} + \dfrac{y}{x^2}} \times \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)$

9) $\dfrac{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}}{1 + x + x^2 + x^3}$

10) $\dfrac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 2}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}}$.

**248.** Vérifier les identités suivantes :

1) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{1}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$

2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)} = 0$

3) $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)} = 0$

4) $\dfrac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)} = -1$

5) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)} = 1$

6) $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{ca}{(b-c)(b-a)} + \dfrac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$.

## Exercices récapitulatifs sur le calcul algébrique

**249.** La formule :

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

se généralise; vérifier, compléter les identités suivantes :

$$(a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = a^4 - b^4$$
$$(a - b)(a^4 + a^3b + \dots) = a^5 - b^5$$
$$\dots\dots$$

**250.** Vérifier l'identité :

$$x^3 + (a + b + c)x^2 + (bc + ca + ab)x + abc = (x + a)(x + b)(x + c).$$

**251.** Décomposer en facteurs :

$$(a + b + c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3).$$

**252.** Décomposer en facteurs :

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3.$$

**253.** Déterminer $p$ pour que le polynôme suivant soit divisible par $x - 2$ :

$$3x^3 - 5x^2 - 7x + p.$$

**254.** On donne :

$$y = x^3 + 4x^2 + x - 6.$$

1° Calculer les valeurs numériques de $y$ pour $x = -1, x = 0, x = -3$.
2° Décomposer $y$ en facteurs.
3° Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles $y = 0$.

**255.** On donne :

$$y = 9x^2 - (2x + 1)^2.$$

1° Développer $y$.
2° Décomposer $y$ en facteurs.
3° Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles $y = 0$.

**256.** On donne :

$$y = (17x^2 - 1)^2 - 64x^4.$$

1° Développer $y$.
2° Décomposer $y$ en facteurs.
3° Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles $y = 0$.
4° Calculer $y$ pour $x = 0$.

**257.** Soit le polynôme :

$$P(x) = x^3 + 7x^2 + 16x + 12.$$

1° Déterminer les restes des divisions de ce polynôme successivement par $x - 1$, $x + 1$, $x + 2$, $x - 2$.
2° Décomposer $P(x)$ en facteurs.



**258.** On donne :

$$y = (2x - 1)^2 - (x + 2)^2.$$

1° Développer $y$.
2° Décomposer $y$ en facteurs.
3° Calculer les valeurs de $y$ successivement pour $x = 0, x = 3, x = -2$ en utilisant la forme de $y$ la plus commode.
4° Déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles $y = 0$.

**259.** De la loi du reste de la division par $x - a$, déduire les caractères de divisibilité par 9 et 11.

**260.** Découper 4 carrés de côtés $a$, 4 carrés de côtés $b$ et 8 rectangles de dimensions $a$ et $b$; former à l'aide de ces cartons, 4 carrés.

**261.** Construire un rectangle dont l'aire égale l'aire totale d'un cylindre de hauteur $h$ et de rayon de base $r$.

**262.** Construire un parallélipipède rectangle dont le volume égale la somme des volumes de deux parallélipipèdes rectangles, l'un dont la base est un carré d'arête $a$ et dont la hauteur est $b$, l'autre dont la base est un carré d'arête $b$ et dont la hauteur est $a$.

**263.** Construire un rectangle dont l'aire égale la somme des aires d'un carré de côté $a$ et d'un triangle de base $a$ et de hauteur $b$.

**264.** Construire un parallélipipède rectangle dont le volume égale la somme des volumes d'un cube d'arête $a$ et d'une pyramide à base carrée de côté $a$ et de hauteur $b$.

**265.** Construire un cylindre dont le volume égale la somme des volumes d'une sphère de rayon $a$ et d'un cône de hauteur $b$ et de rayon de base $a$.

**266.** Construire un rectangle dont l'aire égale la somme des aires de trois triangles de même hauteur $h$ et de bases respectives $a$, $b$, $c$.

**267.** Montrer que :

$$b^2(b + c)^2 + c^2(b + c)^2 + b^2c^2$$

est le carré d'un polynôme.

**268.** Mettre :

$$2a(a - b) + 2b(b - c) + 2c(c - a)$$

sous la forme d'une somme de trois carrés.

**269.** Mettre :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

sous la forme d'une somme de deux carrés.

**270.** On donne :

$$xy = a \quad \text{et} \quad x + y = b,$$

calculer $x^2 + y^2$ et $x^3 + y^3$ en fonction de $a$ et $b$.

**271.** Simplifier la fraction :

$$\frac{1 - x^2 + x^3 - x^5}{x + x^2 - x^3 - x^4}.$$

**272.** Simplifier la fraction :

$$\frac{a^2 + 2a - b^2 + 1}{a + b + 1}.$$

**273.** Effectuer :

$$\frac{x + x^2}{x} + x^2 + \frac{x^3}{1 - x}.$$

**274.** Effectuer :

$$\frac{\dfrac{2}{x+y} - \dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x-2y} + \dfrac{1}{y}} - \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x+y}}{\dfrac{1}{y-2x} + \dfrac{1}{x}}.$$

**275.** Effectuer :

$$\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right)\frac{a^4 - a^3}{a^4 - 1}.$$

**276.** Soit :

$$y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x^2 - 1}$$

1° Quelles sont les valeurs de $x$ pour lesquelles $y$ n'a pas de valeur ?
2° Transformer $y$ en une fraction la plus simple possible.
3° Quelles sont les valeurs de $y$ pour $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$, $x = 2$ ?

**277.** Vérifier la relation :

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} - \frac{1}{p} = \frac{abc}{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où

$$2p = a + b + c.$$

**278.** On donne :

$$x = \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}$$

$$y = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}$$

$$z = \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$$

Montrer que $y = xz$.

**279.** Mettre les expressions suivantes sous une forme plus simple :

1) $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

2) $$\frac{bc(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(a+b)}{(c-a)(c-b)}$$

3) $$\frac{a(b^2+bc+c^2)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(c^2+ca+a^2)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a^2+ab+b^2)}{(c-a)(c-b)}$$

4) $$\frac{a(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$



**280.** Mettre les expressions suivantes sous une forme plus simple :

1) $$\frac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}$$

2) $$\frac{b^2c^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{c^2a^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{a^2b^2}{(c-a)(c-b)}$$

3) $$\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(c^2+ca+a^2)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(a^2+ab+b^2)}{(c-a)(c-b)}$$

4) $$\frac{a^2(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(c-a)^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(a-b)^2}{(c-a)(c-b)}.$$

**281.** On donne :

$$y = \frac{x-1}{x+1}, \qquad x = \frac{1+t}{1-t}.$$

Calculer $y$ en fonction de $t$.

**282.** On donne :

$$z = \frac{1-xy}{1+xy} \cdot \frac{x+y}{x-y}, \qquad x = \frac{1}{t+1}, \qquad y = \frac{1}{t-1}.$$

Calculer $z$ en fonction de $t$.

**283.** On donne :

$$y = x + \frac{1}{x}, \qquad A = x^2 + \frac{1}{x^2}, \qquad B = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Calculer A et B en fonction de $y$.

# CHAPITRE V

## Fractions algébriques.

**178.** *Simplifier les fractions suivantes :*

1° $\dfrac{14b^4x \times 5ay}{15a^2x \times 7b^3y} = \dfrac{2b}{3a}$

2° $\dfrac{axy - bxy}{ab - b^2} = \dfrac{xy}{b}$

3° $\dfrac{a - 3}{2a^2 - 18} = \dfrac{1}{2(a + 3)}$

4° $\dfrac{9a^5 - 16a}{6a^2b^2 - 8b^2} = \dfrac{a(3a^2 + 4)}{2b^2}$

5° $\dfrac{a^3 + b^3}{(a - b)^2 + ab} = a + b$

6° $\dfrac{4(x + y)^2}{3(x^2 - y^2)} = \dfrac{4(x + y)}{3(x - y)}$

7° $\dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

8° $\dfrac{8a^3 + 1}{64a^6 - 1} = \dfrac{1}{8a^3 - 1}$

9° $\dfrac{4a^2 + 12a + 9}{4a^2 - 9} = \dfrac{(2a + 3)^2}{4a^2 - 9} = \dfrac{2a + 3}{2a - 3}$

10° $\dfrac{25x^2 + 20ax + 4a^2}{2(25ax^3 - 4a^3x)} = \dfrac{(5x + 2a)^2}{2ax(25x^2 - 4a^2)} = \dfrac{5x + 2a}{2ax(5x - 2a)}$

11° $\dfrac{12ax^2 + 3ax}{8x^2 + 22x + 5} = \dfrac{3ax(4x + 1)}{(4x + 1)(2x + 5)} = \dfrac{3ax}{2x + 5}$

12° $\dfrac{3x^2 - x - 14}{3abx + 6ab} = \dfrac{(x + 2)(3x - 7)}{3ab(x + 2)} = \dfrac{3x - 7}{3ab}$

13° $\dfrac{x^2 - 7x - 8}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \dfrac{(x + 1)(x - 8)}{x(x + 1)(x + 2)} = \dfrac{x - 8}{x(x + 2)}$

14° $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{9 - x^2} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)}{(3 + x)(3 - x)} = -\dfrac{x + 1}{x + 3}$

15° $\dfrac{8x^2 + 22x - 6}{4x^2 + 27x - 7} = \dfrac{2(x + 3)(4x - 1)}{(4x - 1)(x + 7)} = \dfrac{2(x + 3)}{x + 7}$

16° $\dfrac{2x^2 - 9x + 7}{12x^2 - 21x + 9} = \dfrac{(x - 1)(2x - 7)}{3(x - 1)(4x - 3)} = \dfrac{2x - 7}{3(4x - 3)}$

17° $\dfrac{8x^6 + 27y^6}{8x^4 - 18y^4} = \dfrac{4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4}{2(2x^2 - 3y^2)}$

18° $\dfrac{40x^3 - 5}{12x^2 + 6x + 3} = \dfrac{5(8x^3 - 1)}{3(4x^2 + 2x + 1)} = \dfrac{5(2x - 1)}{3}$

19° $\dfrac{16x^3 - 54}{8x^2 - 24x + 18} = \dfrac{2(8x^3 - 27)}{2(2x - 3)^2} = \dfrac{4x^2 + 6x + 9}{2x - 3}$

20° $\dfrac{(a + b)^2(a^3 - b^3)}{(a^2 - b^2)^2} = \dfrac{(a + b)^2(a^3 - b^3)}{(a + b)^2(a - b)^2} = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a - b}$



21° $\dfrac{a^6 - b^6}{(a + b)^2(a^3 - b^3)} = \dfrac{a^3 + b^3}{(a + b)^2} = \dfrac{a^2 - ab + b^2}{a + b}.$

**179.** *Simplifier les fractions suivantes :*

1° $\dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{(x - 1)(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)} = x + 2$

2° $\dfrac{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \dfrac{(x + 1)^2(2x + 1)}{(x + 1)^3} = \dfrac{2x + 1}{x + 1}$

3° $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 11x + 21}{x^4 - x^3 - 4x^2 - 5x - 3} = \dfrac{(x + 1)(x - 3)(x - 7)}{(x + 1)(x - 3)(x^2 + x + 1)} = \dfrac{x - 7}{x^2 + x + 1}$

4° $\dfrac{(a + b)^2 - (c - b)^2}{(a - b)^2 - (c + b)^2} = \dfrac{(a + c)(a + 2b - c)}{(a + c)(a - 2b - c)} = \dfrac{a + 2b - c}{a - 2b - c}$

5° $\dfrac{(a^2 + b^2 - c^2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4ab^2 + 4abc} = \dfrac{2a^2(2b^2 - 2c^2)}{4ab(b + c)} = \dfrac{a(b - c)}{b}$

6° $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{3x^5 - 10x^3 + 15x - 8} = \dfrac{(x^2 - 1)^2}{(x - 1)^3(3x^2 + 9x + 8)} = \dfrac{(x + 1)^2}{(x - 1)(3x^2 + 9x + 8)}$

7° $\dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8} = \dfrac{(x - 2)(x - 4)}{(x + 1)(x - 2)(x - 4)} = \dfrac{1}{x + 1}$

8° $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^3 - 3x + 2} = \dfrac{(x + 2)(x + 1)(x - 1)}{(x + 2)(x - 1)^2} = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

9° $\dfrac{1 + x^3}{1 + 2x + 2x^2 + x^3} = \dfrac{(1 + x)(1 - x + x^2)}{(1 + x)(1 + x + x^2)} = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$

10° $\dfrac{2x^3 - 7x^2 + 2x + 3}{2x^3 - 9x^2 + 10x - 3} = \dfrac{(x - 1)(x - 3)(2x + 1)}{(x - 1)(x - 3)(2x - 1)} = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

11° $\dfrac{x^2 - a^2 + 2ab - b^2}{x^2 - 2(a - b)x + (a - b)^2} = \dfrac{x^2 - (a - b)^2}{(x - a + b)^2} = \dfrac{x + a - b}{x - a + b}$

12° $\dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - x^2}{x^2 - 2(a + b)x + (a + b)^2} = -\dfrac{x + a + b}{x - a - b}$

13° $\dfrac{1 - a^2}{(1 + ax)^2 - (a + x)^2} = \dfrac{1 - a^2}{(1 - a^2)(1 - x^2)} = \dfrac{1}{1 - x^2}$

14° $\dfrac{a^2x^2 + a^2x + abx + ab}{a^2x^2 - a^2x + abx - ab} = \dfrac{a^2x(x+1) + ab(x+1)}{a^2x(x-1) + ab(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-1}$

15° $\dfrac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} = \dfrac{x^4 - y^4}{(x-y)(x^2+y^2)} = x + y$

16° $\dfrac{1 - x^2 + x^3 - x^5}{x + x^2 - x^3 - x^4} = \dfrac{(1-x^2)(1+x^3)}{x(1+x)(1-x^2)} = \dfrac{1 - x + x^2}{x}$

17° $\dfrac{(a^8 + 2a^4x^2 + x^4)(a^4 - x^2)}{(a^2+x)(a^6 - a^4x + a^2x^2 - x^3)} = \dfrac{(a^4+x^2)^2(a^4-x^2)}{a^8 - x^4} = a^4 + x^2$

18° $\dfrac{a^3 + a(1+a)x + x^2}{a^4 - x^2} = \dfrac{(a+x)(a^2+x)}{a^4 - x^2} = \dfrac{a+x}{a^2 - x}$

19° $\dfrac{7a^2 + 19ab - 6b^2}{7a^3 - 2a^2b - 63ab^2 + 18b^3}$

$$= \frac{(a+3b)(7a-2b)}{(a+3b)(a-3b)(7a-2b)} = \frac{1}{a-3b}$$

20° $\dfrac{a^5 + a^2b^3 - a^4b - ab^4}{a^4 - a^2b^2 + a^3b - ab^3} = \dfrac{a^2(a^3+b^3) - ab(a^3+b^3)}{a^2(a^2-b^2) + ab(a^2-b^2)}$

$$= \frac{a(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)}{a(a-b)(a+b)^2} = \frac{a^2 - ab + b^2}{a+b}$$

**180.** *Effectuer les opérations suivantes et simplifier :*

1° $\dfrac{x+3}{3} + \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{5x}{6}$ 4° $\dfrac{x+a}{2} - \dfrac{2x+a}{4} = \dfrac{a}{4}$

2° $\dfrac{x+3}{3} - \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{12-x}{6}$ 5° $\dfrac{a+b}{a} + \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{(a+b)^2}{ab}$

3° $\dfrac{a-b}{4} - \dfrac{b-a}{6} = \dfrac{5(a-b)}{12}$ 6° $\dfrac{a+b}{a} - \dfrac{b-a}{b} = \dfrac{a^2+b^2}{ab}$

7° $\dfrac{1}{a+2} + \dfrac{1}{a+4} = \dfrac{2(a+3)}{(a+2)(a+4)}$

8° $\dfrac{3}{x-6} - \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x}{(x-6)(x-2)}$

9° $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4} = \dfrac{2x}{x^2-4}$

10° $\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{b}{x-b} = \dfrac{x(a-b)}{(x-a)(x-b)}$

11° $\dfrac{a+3}{a+4} - \dfrac{a+1}{a+2} = \dfrac{2}{(a+4)(a+2)}$

12° $\dfrac{x-3}{x-5} - \dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{-2}{(x-5)(x-6)}$



13° $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{x+3}{x-3} = \dfrac{-12x}{x^2-9}$

14° $\dfrac{x+a}{a-x} - \dfrac{x-a}{a+x} = \dfrac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}$

15° $\dfrac{a}{x-a} - \dfrac{a^2}{x^2-a^2} = \dfrac{ax}{x^2-a^2}$

16° $\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{2x}{x^2-9} = \dfrac{5x+9}{x^2-9}$

17° $\dfrac{2x-3a}{x-2a} - \dfrac{2x-a}{x-a} = \dfrac{a^2}{(x-a)(x-2a)}$

18° $\dfrac{x+a}{x-2a} - \dfrac{x^2+2a^2}{x^2-4a^2} = \dfrac{3ax}{x^2-4a^2}$

19° $\dfrac{2x^2}{x^2-y^2} - \dfrac{2x^2}{x^2+xy} = \dfrac{2x^2}{x^2-y^2} - \dfrac{2x}{x+y} = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$

20° $\dfrac{x^2}{x-x^3} - \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{x}{1+x^2} = \dfrac{2x^3}{1-x^4}$

21° $\dfrac{a+1}{x^2-a^2} + \dfrac{a-1}{(x-a)^2} = \dfrac{2a(x-1)}{(x+a)(x-a)^2}.$

**181.** *Effectuer et simplifier.*

1° $\dfrac{2}{2-x} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2}{2-x} + \dfrac{x}{2-x} = \dfrac{2+x}{2-x}$

2° $\dfrac{5}{a^2-1} + \dfrac{5}{1-a} = \dfrac{5}{a^2-1} - \dfrac{5}{a-1} = \dfrac{-5a}{a^2-1}$

3° $\dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-a} = \dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a-b} = \dfrac{a-b}{a-b} = 1$

4° $\dfrac{3}{1-x^2} - \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{3}{1-x^2} + \dfrac{2}{1-x} = \dfrac{5+2x}{1-x^2}$

5° $\dfrac{2a}{a+1} + \dfrac{3a^2+1}{1-a^2} = \dfrac{2a}{a+1} - \dfrac{3a^2+1}{a^2-1}$

$$= -\frac{(a+1)^2}{a^2-1} = \frac{1+a}{1-a}$$

6° $\dfrac{y^2}{x^3-y^3} + \dfrac{x^3y^2}{y^6-x^6} = \dfrac{y^2}{x^3-y^3} - \dfrac{x^3y^2}{x^6-y^6} = \dfrac{y^5}{x^6-y^6}.$

**182.** *Réduire en une seule fraction et simplifier :*

1° $a^2 - \dfrac{x^3}{a} = \dfrac{a^3 - x^3}{a}$ 2° $a - \dfrac{3b-a}{6} = \dfrac{7a-3b}{6}$

3° $1 - \frac{a-b}{a+b} = \frac{2b}{a+b}$ 4° $1 + \frac{a+b}{a-b} = \frac{2a}{a-b}$

5° $x - \frac{x^2}{a+x} = \frac{ax}{a+x}$

6° $a + b - \frac{a^2 - b^2}{a + 2b} = \frac{3b(a+b)}{a+2b}$

7° $2x - \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 2x - (x - 2) = x + 2$

8° $x + y + \frac{x^2 - y^2}{x - y} = (x + y) + (x + y) = 2(x + y)$

9° $x + 2 - \frac{x^2 - 2x + 4}{x + 2} = \frac{(x+2)^2 - (x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = \frac{6x}{x+2}$

10° $1 + x + x^2 + \frac{x^3}{1 - x} = \frac{(1 - x^3) + x^3}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$

11° $1 - x + x^2 - \frac{x^3}{1 + x} = \frac{(1 + x^3) - x^3}{1 + x} = \frac{1}{1 + x}$

12° $1 - 2x + x^2 + \frac{1 - x^4}{1 + 2x + x^2} = \frac{(1 - x^2)^2 + (1 - x^4)}{1 + 2x + x^2}$

$$= \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x)^2} = \frac{2(1 - x)}{1 + x}.$$

**183.** *Effectuer les opérations suivantes et simplifier :*

1° $\frac{5x - 1}{8} - \frac{3x - 2}{7} + \frac{x - 5}{4} = \frac{25x - 61}{56}$

2° $\frac{x - 2y}{xy} + \frac{3y - a}{ay} - \frac{3x - 2a}{ax} = \frac{0}{axy} = 0$

3° $\frac{a - x}{x} + \frac{a + x}{a} - \frac{a^2 - x^2}{2ax} = \frac{a^2 + 3x^2}{2ax}$

4° $\frac{2}{xy} - \frac{3y^2 - x^2}{xy^3} + \frac{xy + y^2}{x^2y^2} = \frac{x^3 + y^3}{x^2y^3}$

5° $\frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y} + \frac{2x}{x^2 - y^2} = \frac{2(x - y)}{x^2 - y^2} = \frac{2}{x + y}$

6° $\frac{12}{9 - a^2} - \frac{2}{3 + a} - \frac{1}{3 - a} = \frac{3 + a}{9 - a^2} = \frac{1}{3 - a}$

7° $\frac{a}{a + b} + \frac{b}{a - b} - \frac{2ab}{a^2 - b^2} = \frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{a - b}{a + b}$

8° $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \frac{b}{a - b} - \frac{a}{a + b} = \frac{2b(a + b)}{a^2 - b^2} = \frac{2b}{a - b}$



9° $\frac{a + 8}{a - 1} + \frac{a + 4}{a + 1} - \frac{2(4a + 1)}{a^2 - 1} = \frac{2(a + 1)^2}{a^2 - 1} = \frac{2(a + 1)}{a - 1}$

10° $\frac{a}{2(a + b)} + \frac{2a^2}{3a^2 - 3b^2} - \frac{3b}{4a - 4b} = \frac{14a^2 - 15ab - 9b^2}{12(a^2 - b^2)}$

11° $\frac{a + 5}{a - 1} - \frac{6}{a^2 + a + 1} - \frac{6(a^2 + 2)}{a^3 - 1} = \frac{a^3 - 1}{a^3 - 1} = 1$

12° $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2b + ab^2}{a^2 + ab} = \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - b = \frac{a^2}{a + b}$

13° $\frac{a^2 + ab}{a^2 - ab} - \frac{a^3 + 2a^2b + ab^2}{a^2b - b^3} = \frac{a + b}{a - b} - \frac{a(a + b)}{b(a - b)}$

$$= -\frac{a + b}{b}$$

14° $am(a + m) - \frac{a^4m + am^4}{a^2 + 2am + m^2}$

$$= am(a + m) - \frac{am(a^2 - am + m^2)}{a + m}$$

$$= \frac{am(a + m)^2 - am(a^2 - am + m^2)}{a + m} = \frac{3a^2m^2}{a + m}$$

15° $\frac{a^3 + 2a^2b + ab^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^3 + b^3}{(a - b)^2 + 2b(a - b)}$

$$= \frac{a(a + b)}{a - b} + \frac{a^2 - ab + b^2}{a - b} = \frac{2a^2 + b^2}{a - b}$$

16° $2 + \frac{1}{2 - x} + \frac{1}{2 + x} + \frac{4}{x^2 - 4} = 2,$

car la somme des deux premières fractions est égale à l'opposée de la troisième.

17° $\frac{3}{1 + a} - \frac{2}{1 - a} - \frac{5a}{a^2 - 1}$

$$= \frac{3}{1 + a} - \frac{2}{1 - a} + \frac{5a}{1 - a^2} = \frac{1}{1 - a^2}$$

18° $\frac{x - a}{x + a} + \frac{a^2 + 3ax}{a^2 - x^2} + \frac{x + a}{x - a} = \frac{x - a}{x + a} - \frac{a^2 + 3ax}{x^2 - a^2} + \frac{x + a}{x - a}$

$$= \frac{2x^2 - 3ax + a^2}{x^2 - a^2} = \frac{(x - a)(2x - a)}{x^2 - a^2} = \frac{2x - a}{x + a}$$

19° $\frac{3 - 2x}{2x + 3} - \frac{2x + 3}{3 - 2x} + \frac{36}{4x^2 - 9}$

$$= \frac{3 - 2x}{2x + 3} + \frac{2x + 3}{2x - 3} + \frac{36}{4x^2 - 9} = \frac{12}{2x - 3}$$

20° $\frac{ax^2 + b}{2x - 1} + \frac{2(bx + ax^2)}{1 - 4x^2} - \frac{ax^2 - b}{2x + 1}$

$$= \frac{ax^2 + b}{2x - 1} - \frac{2x(ax + b)}{4x^2 - 1} - \frac{ax^2 - b}{2x + 1} = \frac{2bx}{4x^2 - 1}.$$

**184.** *Effectuer et simplifier.*

1° $$\frac{x}{x^2+5x+6}+\frac{15}{x^2+9x+14}-\frac{12}{x^2+10x+21}$$
$$=\frac{x}{(x+2)(x+3)}+\frac{15}{(x+2)(x+7)}-\frac{12}{(x+3)(x+7)}$$
$$=\frac{x^2+10x+21}{(x+2)(x+3)(x+7)}=\frac{1}{x+2}$$

2° $$\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-x-2}+\frac{2}{x^2-1}$$
$$=\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{(x+1)(x-2)}+\frac{2}{x^2-1}$$
$$=\frac{4x-4}{(x^2-1)(x-2)}=\frac{4}{(x+1)(x-2)}$$

3° $$\frac{1}{x^2-4x+3}+\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x^2-5x+6}$$
$$=\frac{3x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{3}{(x-1)(x-3)}$$

4° $$\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}-\frac{a^2-c^2}{a^2c+2ac^2+c^3}+\frac{2c}{c^2-a^2}-\frac{3}{a+c}$$
$$=\frac{a}{c(a-c)}-\frac{a-c}{c(a+c)}-\frac{2c}{a^2-c^2}-\frac{3}{a+c}=\frac{0}{c(a^2-c^2)}=0$$

5° $$\frac{b}{a(a^2-b^2)}+\frac{a}{b(a^2+b^2)}+\frac{a^4+b^4}{ab(b^4-a^4)}-\frac{a^6}{b^8-a^8}$$

La somme des deux premiers termes est égale à l'opposé du troisième terme. L'expression se réduit donc à son quatrième terme.

6° $$\frac{a^2-2ax+x^2}{2(a^2-x^2)}-\frac{2ax(a+x)}{(a-x)(a^2+2ax+x^2)}-\frac{x^2-a^2}{2(x-a)^2}$$
$$=\frac{a-x}{2(a+x)}-\frac{2ax}{a^2-x^2}+\frac{a+x}{2(a-x)}$$
$$=\frac{(a-x)^2-4ax+(a+x)^2}{2(a^2-x^2)}=\frac{a-x}{a+x}$$

7° $$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)}-\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0$$



8° $$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}-\frac{c-a}{(b-a)(b-c)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}-\frac{a-c}{(a-b)(b-c)}+\frac{a-b}{(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{(b-c)^2-(a-c)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$
$$=\frac{2(b^2-bc+ac-ab)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{2}{c-a}$$

9° $$\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab}{(c-a)(c-b)}.$$

Le dénominateur commun est $(a-b)(a-c)(b-c)$. Le numérateur est $bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)$; c'est un trinôme en $a$ qui s'annule pour $a=b$ et $a=c$; le coefficient de $a^2$ étant $b-c$, ce trinôme est égal au dénominateur commun.

L'expression proposée est donc égale à 1.

10° $$\frac{a^2bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2ab}{(c-a)(c-b)}=0.$$

**185.** *Effectuer les multiplications suivantes et simplifier :*

1° $$\frac{a}{6b}\times\frac{3b}{4}\times\frac{2b}{5}=\frac{ab}{20}$$

2° $$\left(-\frac{7a}{10}\right)\times\frac{5a}{6}\times\frac{4x^2}{21a}=-\frac{ax^2}{9}$$

3° $$\left(-\frac{a}{2x}\right)\times\frac{8x}{9}\times\left(-\frac{6a}{7x}\right)=\frac{8a^2}{21x}$$

4° $$(-3a^2)\left(-\frac{11a}{15x}\right)\left(-\frac{x}{22}\right)=-\frac{a^3}{10}$$

5° $$\frac{4x^2-6xy}{5x}\times\frac{10x}{6x-9y}=\frac{4x}{3}$$

6° $$\frac{8x-2y}{x+y}\times\frac{2x-8y}{4x-y}=\frac{4(x-4y)}{x+y}$$

7° $$\frac{4+2a}{6-3a}\times\frac{3(a-2)^2}{2(a+2)^2}=\frac{6(a+2)(2-a)^2}{6(2-a)(a+2)^2}=\frac{2-a}{2+a}$$

8° $$\frac{6a+a^2}{6-a}\times\frac{a^2-36}{a}=\frac{a(a+6)(a+6)(a-6)}{-(a-6)a}=-(a+6)^2$$

9° $$\frac{x^4+x^2-2}{x^2+3x+2}\times\frac{x+1}{x^2-1}=\frac{(x^2+2)(x^2-1)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x^2-1)}=\frac{x^2+2}{x+2}$$

10° $\dfrac{2x^2 - 3x - 9}{x^2 + 5x + 4} \times \dfrac{x+4}{2x+3} = \dfrac{(x-3)(2x+3)(x+4)}{(x+1)(x+4)(2x+3)} = \dfrac{x-3}{x+1}$

11° $\dfrac{a^2x^2}{y^2} \times \dfrac{xy}{a(x+y)} \times \dfrac{x^2-y^2}{axy} = \dfrac{x^2(x-y)}{y^2}$

12° $\dfrac{a+x}{(m+n)^3} \times \dfrac{x^2-y^2}{12} \times \dfrac{(m+n)^2}{m-n} \times \dfrac{6(m^2-n^2)}{x+y} = \dfrac{(a+x)(x-y)}{2}$

13° $\dfrac{ab-3a}{4b-5} \times \dfrac{20b-25}{ac+2a} \times \dfrac{2b+bc}{a-5} \times \dfrac{2(5a-a^2)}{4c} = -\dfrac{5ab(b-3)}{2c}$

14° $\dfrac{x^3+y^3}{x^4-y^4} \times \dfrac{x^2y+y^3}{x^4+x^2y^2+y^4} \times \dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y} = \dfrac{y}{x^2-y^2}$

15° $\dfrac{6x^2+5xy-6y^2}{3x^2-8xy-3y^2} \times \dfrac{3x^2-11xy+6y^2}{6x^2+11xy+3y^2} \times \dfrac{9x^2+9xy+2y^2}{9x^2-12xy+4y^2}$

$$= \frac{(3x-2y)(2x+3y)(3x-2y)(x-3y)(3x+y)(3x+2y)}{(3x+y)(x-3y)(3x+y)(2x+3y)(3x-2y)^2} = \frac{3x+2y}{3x+y}.$$

**186.** *Effectuer et simplifier.*

1° $\left(1 - x + \dfrac{4+x^2}{1+x}\right)(1-x^2) = \dfrac{5(1-x^2)}{1+x} = 5(1-x)$

2° $\left(1 - x - \dfrac{2-x^2}{1+x}\right)(1-x^2) = \dfrac{-1}{1+x} \times (1-x^2) = x - 1$

3° $\left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right) = \dfrac{4x}{1-x^2} \times \dfrac{3(1-x^2)}{4x} = 3$

4° $\left(\dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y}\right) \times \dfrac{x^2-y^2}{2y} = 1$

5° $\left(x^2 - xy + y^2 - \dfrac{2y^3}{x+y}\right) \times \dfrac{x+y}{x-y} = x^2 + xy + y^2$

6° $\left(x + 2a - \dfrac{a^2}{2x+3a}\right)\left(2x - a - \dfrac{2a^2}{x+a}\right)$

$$= \frac{2x^2+7ax+5a^2}{2x+3a} \times \frac{2x^2+ax-3a^2}{x+a}$$

$$= \frac{(x+a)(2x+5a)}{2x+3a} \times \frac{(x-a)(2x+3a)}{x+a} = (2x+5a)(x-a)$$

7° $(x+2)\left(1 + \dfrac{6x+12}{x^2-x-6}\right)\left(1 - \dfrac{5x+5}{x^2+3x+2}\right) =$

$$(x+2)\left(1+\frac{6}{x-3}\right)\left(1-\frac{5}{x+2}\right) = \frac{(x+2)(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+2)} = x+3$$



8° $\left(b + \dfrac{ab}{b-a}\right)\left(b - \dfrac{ab}{a+b}\right) \times \dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$

$$= \frac{b^2}{b-a} \times \frac{b^2}{a+b} \times \frac{b^2-a^2}{b^2+a^2} = \frac{b^4}{b^2+a^2}.$$

**187.** *Effectuer les divisions suivantes et simplifier.*

1° $(x+y) : \dfrac{x+y}{x-y} = x - y$

2° $(a^2-b^2) : \dfrac{a+b}{a-b} = (a-b)^2$

3° $\dfrac{a^2-4}{b+3} : \dfrac{a+2}{b^2-9} = (a-2)(b-3)$

4° $\dfrac{4x^2-9a^4}{ab-a^2} : \dfrac{2x-3a^2}{a^3b-a^4} = a^2(2x+3a^2)$

5° $\dfrac{(a+b)^2}{x-y} : \dfrac{a^2-b^2}{x^2-y^2} = \dfrac{(a+b)(x+y)}{a-b}$

6° $\dfrac{20x-25}{3b-4} : \dfrac{4a^2x-5a^2}{9b^2-16} = \dfrac{5(3b+4)}{a^2}$

7° $\left(\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{x^2}{a^2}\right) : \left(\dfrac{a}{x} + \dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{a}{x} - \dfrac{x}{a} = \dfrac{a^2-x^2}{ax}.$

Le dividende est une différence de deux carrés et le quotient est le binôme conjugué du diviseur.

8° $\left(\dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}\right) = -\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{a+x}{ax}$

9° $\left(a^4 - \dfrac{1}{a^2}\right) : \left(a^2 + \dfrac{1}{a}\right) = a^2 - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a^3-1}{a}$

10° $\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) : \left(\dfrac{a}{x^2} + \dfrac{a}{x}\right) = \dfrac{x^2-1}{x^2} : \dfrac{a+ax}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{a(x+1)} = \dfrac{x-1}{a}$

11° $\left(1 + \dfrac{a^3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{a}{x^3}\right) = \dfrac{x^3+a^3}{x+a} = x^2 - ax + a^2$

12° $\left(1 + \dfrac{x-a}{x+a}\right) : \left(\dfrac{x+a}{x-a} - 1\right) = \dfrac{2x}{x+a} : \dfrac{2a}{x-a} = \dfrac{x(x-a)}{a(x+a)}$

13° $\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{3}{x^3}\right) : \left(\dfrac{1}{x^2} - 1\right) = \dfrac{x-3}{x(1-x)}$

14° $(2x^2 - x - 6) : \left(\dfrac{4}{x^2} - 1\right) = -\dfrac{x^2(2x+3)}{x+2}$

15° $\dfrac{2}{1-x^2} : \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{2}{1-x^2} : \dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{1}{x}$

16° $\left(\frac{a^3 - b^3}{a - b} - \frac{a^3 + b^3}{a + b}\right) : \frac{4ab}{a^2 - b^2} = 2ab : \frac{4ab}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{2}.$

**188.** *Transformer les expressions suivantes :*

1° $\dfrac{\dfrac{1}{1 + x} + \dfrac{x}{1 - x}}{\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{x}{1 + x}}$ 4° $\dfrac{\dfrac{a - b}{1 + ab} + \dfrac{b - c}{1 + bc}}{1 - \dfrac{(a - b)(b - c)}{(1 + ab)(1 + bc)}}$

2° $\dfrac{\dfrac{a + b}{a - b} - \dfrac{a - b}{a + b}}{1 - \dfrac{a^2 + b^2}{(a + b)^2}}$ 5° $\dfrac{1}{a - \dfrac{a^2 - 1}{a + \dfrac{1}{a - 1}}}$

3° $\dfrac{\dfrac{x - y}{y - a} - \dfrac{y - a}{x - y}}{\dfrac{x - y - 1}{x - y} - \dfrac{y - a - 1}{y - a}}$ 6° $\dfrac{a - x}{a^2 - ax - \dfrac{(a - x)^2}{1 - \dfrac{a}{x}}}$

7° $\dfrac{\dfrac{a}{a + 1} + \dfrac{a}{a - 1}}{2 - \dfrac{a - 7}{1 - a}} \times \dfrac{1 - \dfrac{4}{a + 1}}{a + \dfrac{a(a - 1)}{a + 1}}$

8° $\dfrac{a + \dfrac{b - a}{1 + ab}}{1 - \dfrac{a(b - a)}{1 + ab}} \times \dfrac{\dfrac{x + y}{1 - xy} - y}{1 + \dfrac{y(x + y)}{1 - xy}}$

9° $\dfrac{\dfrac{x - 1}{3} + \dfrac{x - 1}{x - 2}}{\dfrac{x + 2}{4} + \dfrac{x + 2}{x - 3}} : \dfrac{\dfrac{x + 3}{3} - \dfrac{x + 3}{x - 2}}{\dfrac{x - 5}{12} + \dfrac{x - 5}{4(x - 1)}}$

10° $\dfrac{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} - 1}{\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{x}{y} + 1} \times \dfrac{1 + \dfrac{y}{x}}{x - y} : \dfrac{1 + \dfrac{y^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{y} - \dfrac{y^2}{x}}.$

Nous désignerons chaque fois par E l'expression à calculer, par N son numérateur et par D son dénominateur.

1° En multipliant le numérateur et le dénominateur par $1 - x^2$, il vient :

$$E = \frac{1 - x + x(1 + x)}{1 + x - x(1 - x)} = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1.$$



2° On a successivement :

$$N = \frac{4ab}{a^2 - b^2}; \quad D = \frac{2ab}{(a + b)^2}; \quad E = \frac{2(a + b)^2}{a^2 - b^2} = \frac{2(a + b)}{a - b}.$$

3° En multipliant N et D par $(x - y)(y - a)$, il vient

$$E = \frac{(x - y)^2 - (y - a)^2}{(x - y - 1)(y - a) - (y - a - 1)(x - y)}$$
$$= \frac{(x - a)(x - 2y + a)}{x - 2y + a} = x - a.$$

4° En multipliant N et D par $(1 + ab)(1 + bc)$, il vient

$$E = \frac{(a - b)(1 + bc) + (b - c)(1 + ab)}{(1 + ab)(1 + bc) - (a - b)(b - c)}$$
$$= \frac{(a - c)(b^2 + 1)}{(1 + ac)(b^2 + 1)} = \frac{a - c}{1 + ac}.$$

5° Comme $a + \frac{1}{a - 1} = \frac{a^2 - a + 1}{a - 1}$, on peut écrire :

$$D = a - \frac{(a^2 - 1)(a - 1)}{a^2 - a + 1} = \frac{2a - 1}{a^2 - a + 1}$$

et $E = \dfrac{a^2 - a + 1}{2a - 1}.$

6° Comme $1 - \frac{a}{x} = \frac{x - a}{x}$, on a

$$D = a^2 - ax - x(x - a) = a^2 - x^2 \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{a + x}.$$

7° Les deux facteurs valent respectivement

$$\frac{2a^2}{3(a + 1)(a - 3)} \quad \text{et} \quad \frac{a - 3}{2a^2}; \quad \text{d'où} \quad E = \frac{1}{3(a + 1)}.$$

8° Les deux facteurs valent respectivement

$$\frac{a + a^2b + (b - a)}{1 + ab - a(b - a)} = b \quad \text{et} \quad \frac{x + y - y(1 - xy)}{1 - xy + y(x + y)} = x.$$

D'où $E = bx.$

9° Le dividende et le diviseur valent respectivement

$$\frac{4(x - 1)(x - 3)}{3(x - 2)(x + 2)} \quad \text{et} \quad \frac{4(x - 1)(x + 3)}{(x - 2)(x + 2)}$$

D'où $E = \dfrac{x - 3}{3(x + 3)}.$

10° Le dividende vaut

$$\frac{y(x^2+y^2-xy)}{x(x^2+y^2+xy)} \times \frac{x+y}{x(x-y)} = \frac{y(x^3+y^3)}{x^2(x^3-y^3)};$$

et le diviseur

$$\frac{x^3+y^3}{x^3} : \frac{x^3-y^3}{xy} = \frac{y(x^3+y^3)}{x^2(x^3-y^3)}.$$

D'où $E = 1$.

# CHAPITRE VI

## Équations.

**189.** *Résoudre les équations suivantes :*

1° $6(x+5) - 5x = 25$ **Rép.** $x = -5$
2° $4(4+2x) = 60 - 3x$ » $x = 4$
3° $60x + 1 = 3(3+4x)$ » $x = \frac{1}{6}$
4° $(5-x)(x+4) = 8 - x^2$ » $x = -12$
5° $(x-3)^2 - 5(10+x) = x^2 - 8.$

Il importe de s'exercer à effectuer les calculs indiqués et à réduire les termes semblables sans écritures intermédiaires. On trouve dans le cas actuel

$$x^2 - 11x - 41 = x^2 - 8.$$

D'où $-11x = 33$ et $x = -3.$

6° $(x+5)^2 - (x-5)^2 = 500$ **Rép.** $x = 25$
7° $(x-4)^2 - 5(16-x) = x(x-1)$ » $x = -32$
8° $(x+2)(x+3) = x^2 + 366$ » $x = 72.$

**190.** *Résoudre les équations suivantes :*

1° $3x + 100 = \frac{x}{3} + \frac{x}{2} - 4$

On ne réduit pas les termes du second membre au même dénominateur, mais on multiplie les deux membres de l'équation par le p. p. c. m. des dénominateurs. Il vient ainsi

$$6(3x+100) = 2x + 3x - 24.$$

D'où $13x = -624$ et $x = -48.$

2° $3x - \frac{1}{2}(4-x) = x - \frac{1}{3}$ **Rép.** $x = \frac{2}{3}$

3° $3x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{5} + 6\right) = 25 + \frac{3x}{2}$



Faire disparaître les parenthèses, puis multiplier les deux membres par le p. p. c. m. des dénominateurs. On trouve successivement

$$3x - \frac{x}{10} - 3 = 25 + \frac{3x}{2} \quad \text{et} \quad 30x - x - 30 = 250 + 15x.$$

D'où $14x = 280$ et $x = 20.$

4° $\frac{2x}{5} - \frac{1}{3}\left(\frac{5x}{4} - 4\right) = x + \frac{27}{5}$ **Rép.** $x = -4$

5° $\frac{5x-11}{4} - \frac{x-1}{10} = \frac{11x-1}{12}$

En multipliant les deux membres par 60 qui est le p. p. c. m. des dénominateurs, il vient

$$15(5x-11) - 6(x-1) = 5(11x-1).$$

On effectue les calculs indiqués et on réduit les termes semblables, sans écritures intermédiaires. On trouve ainsi

$$69x - 159 = 55x - 5;$$

puis $14x = 154$; d'où $x = 11.$

6° $\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} = \frac{5x-36}{4} - 1$ **Rép.** $x = 8$

7° $\frac{x+1}{2} - \frac{6x+7}{8} = \frac{4-3x}{5} - \frac{1}{8}$ » $x = 3$

8° $\frac{5x-1}{7} - \frac{9x-7}{5} + \frac{9x-5}{11} = 0$ » $x = 3.$

**191.** *Résoudre les équations suivantes :*

1° $x - 7\left(\frac{x}{5} - \frac{x-5}{4}\right) = 25$

Cette équation peut s'écrire

$$x - \frac{7x}{5} + \frac{7(x-5)}{4} = 25.$$ **Rép.** $x = 25$

2° $x - \left(\frac{x}{33} + \frac{x-15}{4\,½}\right) = \frac{12}{11}$ » $x = -3$

3° $\frac{30}{x+5} - \frac{15}{3} + \frac{5+4x}{x+5} = 0$ » $x = 10$

4° $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{37}{x^2+5x+6}$ » $x = 1$

5° $\frac{x+8}{x-1} - \frac{4+x}{x+1} = \frac{12x}{x^2-1}$ » $x = 2$